El operador paridad.

Podemos ver que las autofunciones del Hamiltoniano son, o bien pares, o bien impares, de modo que se dice que tienen una paridad bien definida. Vamos a ver por qué ocurre esto. Vamos a definir el operador paridad Π como el operador que realiza la siguiente transformación en la representación coordenadas:

$$\Pi\psi(x) = \psi(-x)$$

Vamos a ver cómo son los autovalores y autofunciones de este operador. En primer lugar, podemos comprobar que este operador es hermítico, de modo que se verifica la siguiente relación:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(x)\Pi\psi(x)\right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\Pi\varphi(x)$$

Vamos a comprobarlo:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(x)\Pi\psi(x)\right)^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(x)\psi(-x)\right)^*$$

si realizamos el cambio de variable x por $-x$ aparecerá un signo $-$ debido al dx. Sin embargo, los límites de integración se invierten, de modo que podemos utilizar el signo $-$ para invertirlos de nuevo, por tanto queda que:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(x)\Pi\psi(x)\right)^* &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(-x)\psi(x)\right)^* = \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi(-x)\psi^*(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^*(x)\Pi\varphi(x)\end{aligned}$$

de modo que efectivamente es hermítico y en consecuencia sus autovalores son números reales. Vamos a suponer que la función $p(x)$ es una autofunción del operador paridad de autovalor π, de modo que

$$\Pi p(x) = \pi p(x) = p(-x)$$

Si aplicamos de nuevo el operador paridad

$$\Pi^2 p(x) = \pi^2 p(x) = p(x)$$

Por tanto los autovalores verifican la condición $\pi^2 = 1$, de modo que $\pi = \pm 1$. Existen por tanto dos subespacios de autofunciones del operador paridad: uno de funciones $p_+(x)$ y otro de funciones $p_-(x)$ que verifican la condición:

$$\Pi p_+(x) = p_+(x) = p_+(-x) \quad \text{y} \quad \Pi p_-(x) = -p_-(x) = p_-(-x)$$

Está claro que las funciones del tipo $p_+(x)$ son todas las funciones pares y las funciones del tipo $p_-(x)$ todas las funciones impares, por tanto las funciones pares e impares tienen paridad bien definida. Se dice que las funciones del tipo $p_+(x)$ tienen paridad par, mientras que las funciones del tipo $p_-(x)$ tienen paridad impar.

Si nos fijamos en el operador hamiltoniano del oscilador arómónico resulta que conmuta con el operador paridad, ya que:

$$\Pi \hat{H} \varphi(x) = \Pi \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 \varphi(x) \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(-x)}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 \varphi(-x)$$

y

$$\hat{H} \Pi \varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi(-x)}{dx^2} + \frac{1}{2} k x^2 \varphi(-x)$$

de modo que $\left[\hat{H}, \Pi \right] = 0$. Esto quiere decir que el operador paridad es una constante del movimiento, de modo que si en el instante inicial el estado de la partícula tiene paridad bien definida, en cualquier instante posterior seguirá teniendo la misma paridad. Además, podemos construir una base de autofunciones comunes a los operadores Hamiltoniano y paridad. De hecho, la base que hemos construido está constituida por autofunciones comunes a los dos operadores, de modo que las autofunciones tienen paridad bien definida.

Una vez que hemos encontrado las autofunciones del Hamiltoniano, es decir, los estados estacionarios, podemos encontrar la evolución temporal del estado de una partícula como indicamos anteriormente.