La résolution des équations du 2ème degré

A) Introduction

Résoudre une équation du deuxième degré, c'est calculer les valeurs de x qui annulent cette équation. Cela veut dire que tu dois trouver les solutions de l'égalité $ax^2 + bx + c = 0$. Ce sont toutes les valeurs de x qui marchent. Quand tu remplaces les x dans l'équation par ces valeurs, l'équation est bien égale à 0

Il existe plusieurs méthodes de résolution. Ce document va t'aider à les utiliser correctement et quand il le faut.

B) Comment résoudre une équation du 2eme degré

La résolution d'une équation du 2ème degré demande une maitrise de la **factorisation**.

Qu'est- ce que la factorisation ? C'est la transformation d'une somme en un produit.

Il faudra souvent transformer l'équation $ax^2 + bx + c$ qui est une somme de trois termes en un produit de facteurs.

Ce document te montre comment le faire.

TUTORIEL :

a) Recopie sur ta feuille l'équation à résoudre
Vérifie que tu ne fais pas d'erreur en recopiant l'expression !

b) Tu transformes l'équation en expression du type : « équation = 0 ». Puis te poses cette première question :

Question 1 : l'équation est-elle un produit de termes ? oui / non

Si oui, c'est alors très simple. Les solutions sont déterminées pour chaque facteur égal à zéro

Ex : si A * B * C = 0 alors A=0 ou B=0 ou C=0. La ou les solutions sont rapidement trouvées.

(Attention ! ces termes sont souvent des expressions en x)

Si non, ton but est alors de transformer cette expression en la factorisant et ainsi arriver à un produit de facteurs.

c) Tu étudies maintenant l'équation « Expression en x » = 0

Question 2
Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun. C'est-à-dire trouver un élément identique à tous les termes de l'équation. Si oui, je procède à la mise en évidence,

La résolution des équations du 2ème degré

Sinon je passe à la 3ème question

Question 3 :

Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?

Si oui, je transforme l'équation en identité remarquable.

Si non, je passe à la 4ème question

Question 4 :

Est-ce que je peux trouver une racine r de l'équation. C'est-à dire : Est-ce que je peux trouver une valeur x=r qui annule l'équation.

Si oui, alors l'équation pourra être factorisée par $(x-r)$. L'expression sera alors :

$$ax^2 + bx + c = (x-r)\,(ax+ d) \qquad \text{avec } d = -c/r$$

Pour déterminer r, on procèdera par tâtonnement, c'est-à-dire que l'on commencera par remplacer x par les valeurs 1, 2, 3 puis -1, -2 et -3. Si cela ne marche pas, on continue par 4,5,6 et -4.-5,-6 et si cela ne marche pas, on terminera par 7,8,9 et -7,-8 et -9.

Souvent il ne sera pas nécessaire d'essayer toutes ces valeurs car on remarquera très vite qu'en prenant soit des valeurs positives croissantes ou des valeurs négatives décroissantes on s'éloigne de plus en plus de l'égalité « équation = 0 » recherchée)

Cas particulier : a =1

Tu utilises alors directement la méthode de la somme / produit sans passer par la méthode de détermination de la racine soit :

$$x^2 + bx + c = (x + d)\,(x + e) \qquad \text{avec } \mathbf{c = d\,.\,e} \quad \mathbf{et} \quad \mathbf{b = d + e}$$

Si non, tu devras utiliser la méthode générale du discriminant (Viet)

Cette méthode marche tout le temps, mais il est préférable de l'utiliser en dernier recours car elle entraine assez souvent des calculs fastidieux avec des racines carrées.

La résolution des équations du 2ème degré

Tu calcules alors le Δ (Delta) de l'équation appelé aussi « discriminant »

$\Delta = b^2 - 4ac$

1) Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de valeur de x qui annule l'équation donc S = Ø (ensemble vide)

2) Si $\Delta = 0$, il existe une seule et unique valeur de x qui annule l'équation : $x = -b/2a$

3) Si $\Delta > 0$, il existe deux valeurs de X (X1 et X2) qui annulent l'équation :

$X1 = \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}$ et $X2 = \dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}$

L'expression peut alors de factoriser sous la forme suivante :

$F(X) = a\left(X - \dfrac{(-b-\sqrt{\Delta})}{2a}\right)\left(X - \dfrac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a}\right) \Leftrightarrow F(X) = a(X-X1)(X-X2)$

Attention de ne pas oublier le facteur a au début de l'expression !

Exemple d'exercices :

a) Soit l'équation : $(7x+3)(11x-4) = 0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Oui !
$(7x+3)(11x-4) = 0$
$\Leftrightarrow 7x+3 = 0$ ou $11x-4 = 0$
$\Leftrightarrow x = -3/7$ ou $x = 4/11$ Donc S = {-3/7 ; 4/11}

b) Soit l'équation $84(t-2)t = 0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Oui !
$84(t-2)t = 0$
$\Leftrightarrow t-2 = 0$ ou $t = 0$
$\Leftrightarrow t = 2$ ou $t = 0$ Donc S= {0 ;2}

L'ensemble S est toujours ordonné en écrivant les solutions par ordre croissant

La résolution des équations du 2ème degré

c) Soit l'équation $12x(x-2) + 4(x-2) = 0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Oui ! C'est x-2

$12x(x-2) + 4(x-2) = 0$
$\Leftrightarrow (x-2)\,(12x+4) = 0$
$\Leftrightarrow x=2$ ou $x = -4/12$
$\Leftrightarrow x= 2$ ou $x = -1/3$ Donc $S = \{-1/3 ; 2\}$

d) Soit l'équation $9a^3 = 16a$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
$9a^3 = 16a$
$\Leftrightarrow 9a^3-16a = 0$
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Oui ! C'est a

$9a^3-16a = 0$
$\Leftrightarrow a\,(9a^2-16) = 0$

Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
oui car $9a^2-16 = (3a+4)(3a-4)$

$a\,(9a^2-16) = 0$
$\Leftrightarrow a\,(3a+4)\,(3a-4) = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$ ou $a = -4/3$ ou $a = 4/3$ Donc $S = \{-4/3 ; 0 ; 4/3\}$

e) Soit l'équation $x^3+4x^2 = -3x$
$x^3+4x^2 = -3x$
$\Leftrightarrow x^3+4x^2 + 3x = 0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Oui ! C'est x

La résolution des équations du 2ème degré

$x^3+4x^2 + 3x = 0$
$\Leftrightarrow x\ (x^2+4x+3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x^2+4x+3 = 0$

On doit maintenant étudier l'expression $x^2+4x+3 = 0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ? Non
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun ? Non
Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ? Non
Question : Est-ce que je peux trouver une racine r de l'équation ?
Oui !
on voit tout de suite que tous les nombres positifs (1,2,3, etc…) ne marchent pas.
En revanche -1 marche ! La valeur x = -1 est donc racine de cette équation.

$x^2+4x+3 = 0$
$\Leftrightarrow (x-(-1))\ (x + ?) = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)\ (x+ ?) = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)\ (x+3) = 0$ *(On trouve facilement que la valeur recherchée (?) est égale à 3 !)*

Tu aurais pu voir que le coefficient de x^2 était égale à 1, donc tu aurais pu directement utiliser la méthode somme / produit en disant que $x^2+4x+3 = (x+a)\ (x+b)$ avec $a + b = 4$ et a x $b = 3$ et trouver très facilement $a = 1$ et $b = 3$

$x^3+4x^2 + 3x = 0$
$\Leftrightarrow x\ (x+1)\ (x+3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x= -1$ ou $x=-3$ Donc $S = \{-3 ; -1 ; 0\}$

f) Soit l'équation $5w^2-4w-1=0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Non !
Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
Non !
Question : Est-ce que je peux trouver une racine r de l'équation ?
Oui.
On voit tout de suite que x=1 marche
$5w^2-4w-1=0$
$\Leftrightarrow (w-1)\ (5w + ?) = 0$
Le nombre manquant est facile à calculer ! il est égal à 1

La résolution des équations du 2ème degré

$5w^2-4w-1=0$
$\Leftrightarrow (w-1)(5w+1)=0$
$\Leftrightarrow w=1$ ou $w=-1/5$ Donc $S=\{-1/5 ; 1\}$

g) Soit l'équation : $2x^2-13x+18=0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Non !
Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
Non !
Question : Est-ce que je peux trouver une racine r de l'équation ?
Oui !
On voit que r = 2 marche !
Donc : $2x^2-13x+18=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(2x+?)=0$

Le nombre manquant est trouvé par la question suivante : Quel est le nombre lorsqu'on le multiplie par -2 fait 18 ?
Facile c'est -9 !

$2x^2-13x+18=0$
$\Leftrightarrow (x-2)(2x-9)=0$ Donc $S=\{2 ; 9/2\}$

h) Soit l'équation $169z^2=1$
Je commence par ordonner l'équation c'est-à-dire que je mets tous les termes à gauche.
On a alors : $169z^2-1=0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Non !
Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
Oui !
$169z^2-1=0$
$\Leftrightarrow (13z-1)(13z+1)=0$
$\Leftrightarrow z=1/13$ ou $z=-1/13$ Donc $S=\{-1/13 ; 1/13\}$

La résolution des équations du 2ème degré

i) Soit l'équation $12x^3 = -12x$

$12x^3 = -12x$
$\Leftrightarrow 12x^3+12x = 0$

Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Oui ! C'est 12x !

$12x^3+12x = 0$
$\Leftrightarrow 12x\,(x^2-1) = 0$

Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
Oui ! car $x^2-1 = (x+1)\,(x-1)$

$12x(x^2-1) = 0$
$\Leftrightarrow 12x\,(x+1)\,(x-1) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$ ou $x = -1$ Donc $S = \{-1, 0, 1\}$

j) Soit l'équation $y^2/4 = 1/25$

$y^2/4 = 1/25$
$\Leftrightarrow 25y^2 = 4$ *(produit en croix)*
$\Leftrightarrow 25y^2-4 = 0$

Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?

Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Non !
Question : Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
Oui ! car $25y^2-4 = (5y+2)\,(5y-2)$

$25y^2-4 = 0$
$\Leftrightarrow (5y+2)\,(5y-2) = 0$
$\Leftrightarrow y = -2/5$ ou $y = 2/5$ Donc $S= \{-2/5 \,;\, 2/5\}$

k) Soit l'équation $4x^2-4x=-1$
$4x^2-4x=-1$

La résolution des équations du 2ème degré

$\Leftrightarrow 4x^2\text{-}4x+1 = 0$
Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Non !
Question : Est-ce je peux identifier une expression de l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ?
Oui ! car $4x^2\text{-}4x+1 = (2x\text{-}1)^2$

$4x^2\text{-}4x+1=0$
$\Leftrightarrow (2x\text{-}1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow 2x\text{-}1 =0$
$\Leftrightarrow x = 1/2$ Donc $S = \{1/2\}$

l) Soit l'équation$(x-3)x = (x-3)^2$

$(x\text{-}3)x = (x\text{-}3)^2$
$\Leftrightarrow (x\text{-}3)\, x - (x\text{-}3)^2 = 0$

Question : l'équation est-elle un produit de facteurs ?
Non !
Question Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun
Oui ! c'est (x-3)
$(x\text{-}3)x - (x\text{-}3)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x\text{-}3)\ (x\text{-}(x\text{-}3)) = 0$
$\Leftrightarrow (x\text{-}3)\ (x\text{-}x+3) = 0$
$\Leftrightarrow 3(x\text{-}3) = 0$
$\Leftrightarrow x = 3$ Donc $S = \{3\}$

D) Le conseil à retenir

Pour résoudre la plupart des équations du 2ème degré, voici toutes les questions à te poser l'une après l'autre ? Tu dois au préalable avoir exprimé l'équation de la façon suivante : « équation = 0 »

Question 1 :
L'équation est-elle un produit de facteurs ? oui / non.
Si c'est non alors tu passes à la question 2

Question 2 :
Est-ce que je peux mettre en évidence un facteur commun oui / non
Si c'est non alors tu passes à la question 3

La résolution des équations du 2ème degré

Question 3 :

Est-ce je peux identifier l'équation comme une identité remarquable du type $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, ou a^2-b^2 ? oui / non.

Si c'est non alors tu passes à la question 4

Question 4 :

Est-ce que je peux trouver une racine r de l'équation ? oui / non

Si c'est non je passe à l'ultime étape. Je ressous alors l'équation par la méthode générale. (Viet / discriminant).

Pour être sûr que tu as le bon résultat, tu injectes la ou les solutions que tu as trouvées dans l'équation de départ. Tu dois alors vérifier que celle-ci est bien égale à 0

En adoptant ce tutoriel, Les équations du premier degré seront bientôt une formalité pour toi !

Et puis si tu as encore des difficultés, nous sommes toujours à ta disposition pour t'aider !