⋆⋆ Exercice 1

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{e^{2x-3}}{1-x}$

1) Donner l'ensemble de définition de f.
2) Etudier le signe de la fonction f.
3) Faire une étude asymptotique complète de la fonction f.
4) Déterminer la fonction dérivée.
5) Etudier la croissance de la fonction f.
6) Déterminer les coordonnées exactes des éventuels extrema et de l'ordonnée à l'origine.
7) Tracer le graphe de la fonction f sur une feuille simple dite de brouillon.

⋆⋆⋆ Exercice 2

On considère la fonction $f : x \longmapsto y = x^2 \cdot (\ln(x) - c)$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

a) Montrer que f possède un seul zéro et déterminer ce zéro en fonction de c.

b) Déterminer, en fonction de c, l'abscisse du point à tangente horizontale du graphe de f.

Pour la suite du problème, on choisit $c = 2$, de sorte que $f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) - 2)$.

c) Étudier la fonction f (domaine, zéro, signe, comportement de y lorsque $x \to 0$ et lorsque $x \to +\infty$, coordonnées du point à tangente horizontale et variation de f).
Remarque : on ne demande pas le graphe puisqu'il est représenté ci-dessous.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, les graphes des fonctions f et g données par

$$f(x) = x^2 \cdot (\ln(x) - 2) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x) - 2.$$

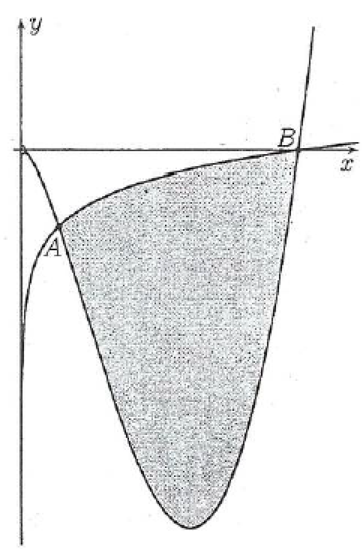
d) Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B des deux graphes.

e) Déterminer une équation de la tangente au graphe de f et une équation de la tangente au graphe de g au point A.
Calculer la valeur de l'angle obtus formé par ces tangentes.

f) En employant la méthode d'intégration par parties, trouver une primitive F de la fonction f.

g) Donner une primitive G de la fonction g.

h) Calculer l'aire de la surface fermée (grisée) délimitée par les graphes de f et g.



★★★ Exercice 3

Partie 2A (17 points)

On donne une fonction f par $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x(x-5)}$.
Étudier la fonction f selon le plan d'étude de la page 8 du formulaire, en précisant les coordonnées de l'intersection du graphe de f avec son éventuelle asymptote horizontale ou oblique.

Partie 2B (10 points)

Soit la fonction g donnée par $g(x) = \ln(f(x))$. Traiter les questions de cette partie à l'aide de l'étude de la fonction f (partie 2A).

a) Donner l'ensemble de définition de g.

b) Déterminer les zéros de g.

c) Déterminer les équations des asymptotes de g.

d) Calculer la dérivée de g.

e) Étudier la croissance de g.

Partie 2C (6 points)

a) Vérifier que $f(x)$ (partie 2A) peut aussi s'écrire $f(x) = 1 - \dfrac{\frac{1}{5}}{x} + \dfrac{\frac{36}{5}}{x-5}$.

b) Déterminer l'aire géométrique du domaine borné limité par le graphe de f et les droites d'équation $y = 0$, $x = 1$ et $x = 4$.

Partie 2D (22 points)

a) Montrer que le point $A(1; -1)$ appartient au graphe de f (partie 2A).

b) Montrer que la droite $t : \; x + 4y + 3 = 0$ est tangente au graphe de f en A.

c) Déterminer une équation du cercle γ_1 tangent à t en A et passant par le point $B(6; 4)$.

d) Soient les points $D(7; -3)$ et $E(-3; 3)$. Montrer qu'une équation du cercle γ_2 de diamètre DE est $(x-2)^2 + y^2 = 34$.

e) Déterminer une équation de la tangente b à γ_2 en E.

f) Soit $F(0; 8)$ le point d'intersection de la droite b avec l'axe Oy. Calculer une équation de la deuxième tangente b' au cercle γ_2 issue de F.

g) Calculer les coordonnées du point de tangence de b' et γ_2.

★★ Exercice 4

On considère la fonction f, donnée par

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$$

où x est exprimé en radians.

1.1 Déterminer l'ensemble de définition de f.

1.2 Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$.

Dans tout ce qui suit, nous allons étudier la fonction sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1.3 Déterminer le(s) zéro(s) et étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1.4 Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} f(x)$ et interpréter le résultat.

On donne la dérivée de cette fonction :

$$f'(x) = \frac{\sin(x) - 2}{(1+\sin(x))^2}$$

1.5 Étudier la croissance de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1.6 Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$.

1.7 Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

★★ Exercice 5

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$.

a) Étudier la fonction f (ensemble de définition, zéro(s), asymptotes, croissance et extrema) puis dessiner son graphe.

b) Vérifier que la fonction $H(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2$ est une primitive de la fonction $h(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.

c) Déterminer l'aire de la surface fermée comprise entre le graphe de f, l'axe Ox et la droite $x = 1$.

d) Pour quelles valeurs de k a-t-on $\int_k^e f(x)\,dx = 0$?

e) La tangente au graphe de f en son point d'intersection avec l'axe Ox forme un triangle avec les axes de référence. Donner l'aire de ce triangle.

★★ Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = (3 - x^2)\, e^{-x}$.

a) Étudier la fonction f (ensemble de définition, zéros et signe, asymptote(s), variations et extrema, graphe).

b) On donne $f''(x) = (-x^2 + 4x + 1)\, e^{-x}$, la deuxième dérivée de f.
Le graphe de f admet deux points d'inflexion d'abscisses positives : vrai ou faux ? Justifier.

c) Vérifier que la fonction $F(x) = (x^2 + 2x - 1)\, e^{-x}$ est une primitive de f, puis calculer l'aire de la surface fermée délimitée par l'axe Ox et le graphe de f.