Medida de dos observables que no conmutan.

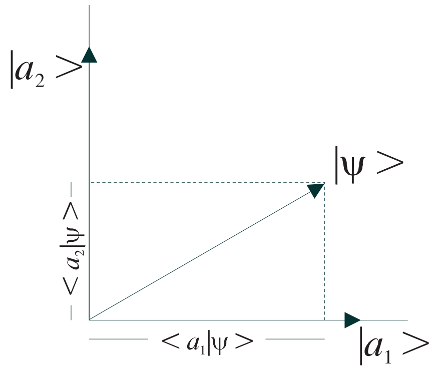
En este apartado vamos a ver que el caso es muy distinto cuando tenemos dos observables que no conmutan. Como veremos, la medida de uno hace que perdamos la información que teníamos sobre el otro.

Para ilustrar qué ocurre cuando tenemos dos observables que no conmutan vamos a analizar un ejemplo sencillo. Supongramos que el espacio de estados es de dimensión 2, de modo que sólo podemos encontrar dos vectores linealmente independientes.

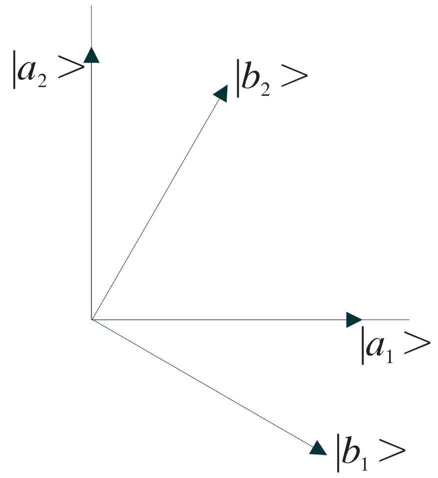
Vamos a suponer que tenemos un observable A de espectro no degenerado, de modo que sus autovectores son los vectores $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ de autovalores a_1 y a_2. Si el estado de la partícula es $|\psi\rangle$, se puede escribir como combinación lineal de los dos vectores $|a_1\rangle$ y $|a_2\rangle$ de la forma:

$$|\psi\rangle = \langle a_1|\psi\rangle \, |a_1\rangle + \langle a_2|\psi\rangle \, |a_2\rangle$$

La probabilidad de que al medir A obtengamos el valor a_1 es $\mathcal{P}(a_1) = |\langle a_1|\psi\rangle|^2$, mientras que la probabilidad de obtener el valor a_2 será $\mathcal{P}(a_2) = |\langle a_2|\psi\rangle|^2$. Supongamos que medimos el observable A y obtenemos el valor a_1. Después de la medida el estado de la partícula será el vector $|a_1\rangle$.



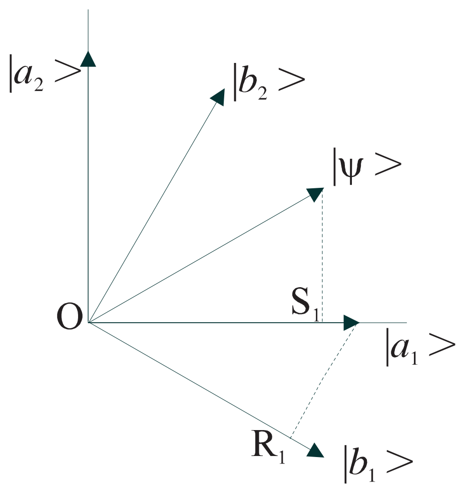
Vamos a suponer que tenemos otro observable B que también tiene un espectro no degenerado y que no conmuta con A. Si $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$ son los autovectores de B éstos no serán colineares con los de A, ya que si lo fueran serían autovectores de A y por tanto tendríamos una base de vectores comunes a A y a B, de modo que A y B conmutarían. En la siguiente figura se muestra gráficamente como podrían ser los vectores $|b_1\rangle$ y $|b_2\rangle$.



Vamos a suponer que inicialmente la partícula se encuentra en el estado $|\psi\rangle$. Pues bien, supongamos que primero medimos el observable A y a continuación el observable B. Como hemos visto, la probabilidad de que al medir A obtengamos el valor a_1 vale $\mathcal{P}(a_1) = |\langle a_1|\psi\rangle|^2$. Si hemos obtenido como resultado de la medida el valor a_1, el estado de la partícula después de la medida de A será $|\psi'\rangle = |a_1\rangle$. En este estado, la probabilidad de que al medir B obtengamos el valor b_1 será $\mathcal{P}(a_1|b_1) = |\langle b_1|a_1\rangle|^2$ y la probabilidad de obtener el valor b_2 será $\mathcal{P}(a_1|b_2) = |\langle b_2|a_1\rangle|^2$. Vamos a suponer que medimos el observable B y que obtenemos el valor b_1. Después de la segunda medida el estado de la partícula será el vector $|\psi''\rangle = |b_2\rangle$. Como $|b_2\rangle$ no es un autovector de A si volvemos a medir A no tenemos porqué obtener el valor a_1, de modo que la medida de B ha hecho que perdamos la información que teníamos sobre el valor de A. Por último, podemos calcular la probabilidad conjunta de obtener los valores a_1 y b_1 cuando medimos sucesivamente los observables A y B. Esta probabilidad será:

$$\mathcal{P}(a_1, b_1) = \mathcal{P}(a_1)\mathcal{P}(a_1|b_1) = |\langle a_1|\psi\rangle|^2 \, |\langle b_1|a_1\rangle|^2$$

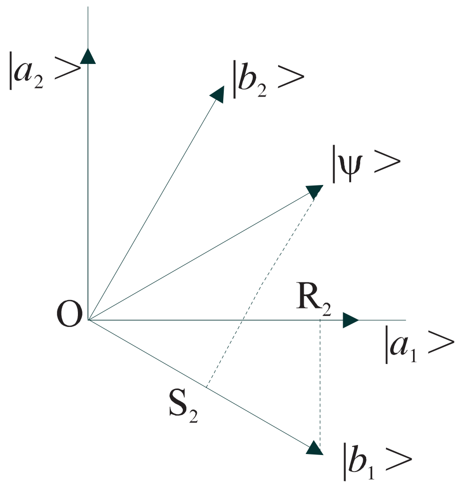
De acuerdo con la figura esta probabilidad será $\mathcal{P}(a_1, b_1) = \overline{OS_1}^2 \overline{OR_1}^2$.



Vamos a suponer que ahora medimos en primer lugar B y a continuación A. Si realizamos una medida de B la probabilidad de que obtengamos el valor b_1 será $\mathcal{P}(b_1) = |\langle b_1|\psi\rangle|^2$. Si al medir B obtenemos como resultado de la medida el valor b_1 el estado de la partícula después de la medida será el vector $|\psi'\rangle = |b_1\rangle$. Si ahora medimos el observable A, la probabilidad de obtener el valor a_1 será $\mathcal{P}(b_1|a_1) = |\langle a_1|b_1\rangle|^2$, mientras que la probabilidad de obtener el valor a_2 será $\mathcal{P}(b_1|a_2) = |\langle a_2|b_1\rangle|^2$. Pues bien, vamos a suponer que como resultado de la medida obtenemos el valor a_1. El estado de la partícula después de esta segunda medida será $|\psi''\rangle = |a_1\rangle$. La medida del observable A ha hecho que perdamos la información que teníamos sobre B, ya que si volvemos a medir el observable B no sabemos a priori el resultado que obtendremos. La probabilidad conjunta de que al medir sucesivamente los observables B y A obtengamos los valores b_1 y a_1 será:

$$\mathcal{P}(b_1, a_1) = \mathcal{P}(b_1)\mathcal{P}(b_1|a_1) = |\langle b_1|\psi\rangle|^2\, |\langle a_1|b_1\rangle|^2$$

De acuerdo con la figura esta probabilidad será $\mathcal{P}(b_1, a_1) = \overline{OS_2}^2\overline{OR_2}^2$.



Está claro que $\overline{OR_1} = \overline{OR_2}$, sin embargo en general $\overline{OS_1} \neq \overline{OS_2}$ ya que $|\langle a_1|\psi\rangle|^2 \neq |\langle b_1|\psi\rangle|^2$. En conclusión cuando los observables A y B no conmutan $\mathcal{P}(a_1, b_1) \neq \mathcal{P}(b_1, a_1)$

$$\mathcal{P}(a_i, b_j) \neq \mathcal{P}(b_j, a_i)$$

de modo que el orden de la medida de los dos obervables influye en las probabilidades del resultado final. Además el estado de la partícula después de realizar medidas sucesivas de los dos observables también depende del orden de los observables. El estado final será un autovector del último observable medido. De acuerdo con el ejemplo anterior, si primero medíamos A y luego B obteniendo como resultados a_1 y b_1 el estado final de la partícula era el vector $|\psi''\rangle = |b_1\rangle$. Por el contrario, cuando medíamos primero B y luego A obteniendo los mismos resultados, el estado final de la partícula era el vector $|\psi''\rangle = |a_1\rangle$. Dos observables que no conmutan no sirven por tanto para preparar el estado de una partícula ya que al medir uno perdemos la información que tenemos sobre el otro. Finalmente, decir que no podemos tener valores bien definidos simultáneamente de dos observables que no conmutan. Este hecho es una consecuencia de que no podemos formar una base de autovetores comunes a los dos observables.

Como ejemplo, los observables de posición y momento en una determinada dirección no conmutan, de modo que una partícula no puede tener bien definida su posición y simultáneamente tener un momento bien definido. Además, la medida de la posición hace que perdamos información sobre su momento y viceversa. Podemos recordar un ejemplo del primer tema en el que una partícula llegaba horizontalmente a una rendija, de modo que conocíamos su momento en la dirección de la rendija (vertical) ya que era cero, y la hacíamos pasar a través de una rendija para medir su posición (la componente vertical de su posición). Lo que ocurría era que la partícula sufría una difracción, de modo que perdíamos información sobre el momento de la partícula. Del mismo modo, cuando truncábamos una onda plana, de momento bien definido, aparecía una cierta anchura en la distribución de momentos. En el siguiente apartado obtendremos una generalización del principio de indeterminación. Según veremos, las dispersiones de dos observables que no conmutan entre sí están relacionadas.