Relaciones de indeterminación.

Si una partícula se encuentra en un estado $|\psi\rangle$ y medimos un observable A podemos obtener como resultado de la medida cualquiera de los autovalores a de A, siempre y cuando el producto escalar $\langle\varphi_a|\psi\rangle$ sea distinto de cero. Si medimos varias veces el observable A partiendo siempre de la partícula en el estado $|\psi\rangle$ cada vez obtendremos un resultado distinto. Si realizamos un número muy grande de medidas y calculamos el valor medio de los resultados obtenidos, este valor medio se aproximará mucho al elemento de matriz $\langle\psi\,|A|\,\psi\rangle$. De hecho, si el número de medidas tiende a infinito el valor medio de los resultados obtenidos tenderá al elemento de matriz anterior.

Sólo en el caso en que el estado $|\psi\rangle$ sea un autovector de A los resultados de las medidas estarán exentos de dispersión. En general la dispersión de los resultatos obtenidos viene dada por la siguiente expresión:

$$\Delta A = \sqrt{\left\langle (A - \langle A\rangle)^2 \right\rangle}$$

Esta dispersión se puede escribir de otra forma que en ocasiones resulta más cómoda.

$$\left\langle (A - \langle A\rangle)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 + \langle A\rangle^2 - 2A\,\langle A\rangle \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A\rangle^2$$

por tanto:

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2}$$

Vamos a considerar ahora dos operadores que no conmutan y vamos a ver que existe una relación entre las dispersiones de los dos operadores. Como ejemplo consideraremos los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p} = \hat{p}_x$ y posteriormente generalizaremos los resultados a dos operadores en general que no conmuten. El conmutador de estos dos operadores vale:

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

A partir de los operadores $\hat{x}$ y $\hat{p}$ podemos definir los siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle \\ \hat{p}' &= \hat{p} - \langle\hat{p}\rangle \end{aligned}$$

La relación de conmutación de estos dos operadores es la misma, es decir $[\hat{x}', \hat{p}'] = i\hbar$

Supongamos que la partícula se encuentra en el estado $|\psi\rangle$ y vamos a considerar el siguiente ket:

$$|\varphi\rangle = (\hat{x}' + i\lambda\hat{p}')\,|\psi\rangle$$

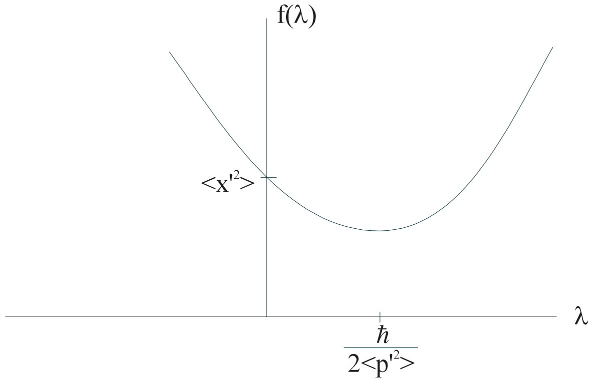
donde λ es un número real. La norma de cualquier vector es un número real positivo, de modo que se debe verificar la condición $\langle\varphi|\varphi\rangle \geq 0$, o bien:

$$\langle\psi\,|(\hat{x}' - i\lambda\hat{p}')\,(\hat{x}' + i\lambda\hat{p}')|\,\psi\rangle \geq 0$$

Vamos a desarrollar la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \left\langle\psi\left|\hat{x}'^2 + \lambda^2\hat{p}'^2 + i\lambda\,(\hat{x}'\hat{p}' - \hat{p}'\hat{x}')\right|\psi\right\rangle &= \left\langle\psi\left|\hat{x}'^2 + \lambda^2\hat{p}'^2 - \lambda\hbar\right|\psi\right\rangle = \\ &= \left\langle\hat{x}'^2\right\rangle + \lambda^2\left\langle\hat{p}'^2\right\rangle - \lambda\hbar \geq 0 \end{aligned}$$

El término de la izquierda, como función de λ, es una parábola. Si $f(\lambda) = \langle \hat{x}'^2 \rangle + \lambda^2 \langle \hat{p}'^2 \rangle - \lambda\hbar$, la función $f(\lambda)$ alcanza el valor mínimo para un cierto valor de $\lambda = \lambda_0$ en el cual $(df/d\lambda)_{\lambda_0} = 0$. Para que se verifique la desigualdad anterior para cualquier valor de λ se debe verificar que $f(\lambda_0) \geq 0$. Vamos a calcular el valor de λ_0.



$$\frac{df}{d\lambda} = 2\lambda \left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle - \hbar = 0$$

de modo que $\lambda_0 = \dfrac{\hbar}{2\left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle}$. Si sustituimos en la función $f(\lambda)$ obtenemos que:

$$f(\lambda_0) = \left\langle \hat{x}'^2 \right\rangle + \frac{\hbar^2}{4\left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle^2} \left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle - \frac{\hbar}{2\left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle}\hbar = \left\langle \hat{x}'^2 \right\rangle - \frac{\hbar^2}{4\left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle} \geq 0$$

Por tanto, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\left\langle \hat{x}'^2 \right\rangle \left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

Por último, como:

$$\begin{aligned} \left\langle \hat{x}'^2 \right\rangle &= \left\langle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle)^2 \right\rangle = (\Delta \hat{x})^2 \\ \left\langle \hat{p}'^2 \right\rangle &= \left\langle (\hat{p} - \langle \hat{p} \rangle)^2 \right\rangle = (\Delta \hat{p})^2 \end{aligned}$$

llegamos a la siguiente relación:

$$(\Delta \hat{x})^2 (\Delta \hat{p})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

o bien

$$\Delta \hat{x} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Que no es otra que la relación de indeterminación de Heisenberg. Se puede generalizar el resultado anterior para cualquier par de operadores que no conmutan. Supongamos los observables A y B de modo que su conmutador sea otro operador iC:

$$[A, B] = iC$$

A partir de estos observables podemos definir los siguientes: $A' = A - \langle A \rangle$ y $B' = B - \langle B \rangle$, que verifican la misma relación de conmutación. Realizando pasos análogos al caso anterior se encuentra la siguiente relación entre las dispersiones de los dos observables:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle C \rangle \right|$$

Este resultado corrobora el hecho de que no puede existir un estado con valores bien definidos de dos observables que no conmuten. Por el contrario, si dos observables conmutan si que se puede tener un estado con valores bien determinados de los dos observables y, por tanto, se pueden medir simultáneamente. Por ejemplo, en el caso de la posición y del momento no puede existir un estado con valores bien definidos de la posición y del momento en una determinada dirección. Por el contrario, podemos tener un estado con posición y momento bien definidos en direcciones distintas, ya que las reglas de conmutación entre estos operadores son:

$$\begin{array}{lll} [\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar & [\hat{x}, \hat{p}_y] = 0 & [\hat{x}, \hat{p}_z] = 0 \\ [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0 & [\hat{y}, \hat{p}_y] = i\hbar & [\hat{y}, \hat{p}_z] = 0 \\ [\hat{z}, \hat{p}_x] = 0 & [\hat{z}, \hat{p}_y] = 0 & [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar \end{array}$$