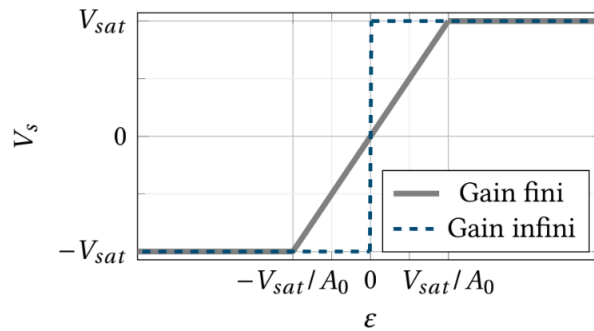


Sujet : Électronique Corrigé

October 12, 2024

1 Questions de Cours

1. Un amplificateur opérationnel idéal (ALI) a une résistance d'entrée infinie et une résistance de sortie nulle. Les courants d'entrée de l'ALI sont nuls.
2. La caractéristique statique de l'ALI idéal a l'allure suivante :



3. Le gain A_0 est de l'ordre de 10^5 , la résistance d'entrée est de l'ordre de $R_e \simeq 10^{12} \Omega$ et $R_s \simeq 10 - 100 \Omega$. La tension de saturation vaut environ $V_{sat} \simeq 15 \text{ V}$.

– **Montage amplificateur inverseur :**

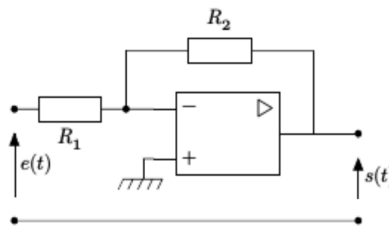


Figure 1: Montage amplificateur inverseur

Le montage inverseur est caractérisé par une tension d'entrée appliquée sur la borne négative (-) de l'ALI à travers une résistance R_1 , et la borne positive (+) étant reliée à la masse. La sortie V_s est reliée à la borne d'entrée (-) par une résistance de rétroaction R_2 .

Les équations pour ce montage sont données comme suit :

$$i_1 + i_2 = i_s = 0$$

Avec :

$$\frac{V_e - V_+}{R_1} = \frac{V_e - V_s}{R_2}$$

Ainsi, la tension à la borne (-) est :

$$V_+ = V_- = 0$$

Le rapport entre la tension de sortie et la tension d'entrée est alors :

$$\frac{V_s}{V_e} = -\frac{R_2}{R_1}$$

Ainsi, le gain de l'amplificateur inverseur est donné par :

$$A_v = -\frac{R_2}{R_1}$$

– **Montage non-inverseur :**

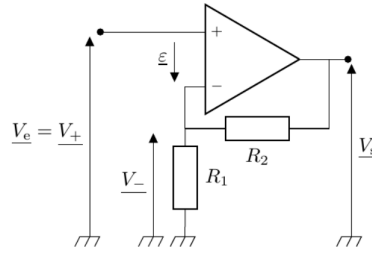


Figure 2: Montage non-inverseur

Pour un amplificateur opérationnel idéal en régime linéaire, la tension entre les bornes (+) et (-) est quasiment nulle (c'est-à-dire $V_+ = V_-$) et le courant qui entre dans les bornes de l'ALI est nul (impédance d'entrée infinie). En appliquant la loi d'Ohm aux résistances, les courants qui circulent à travers R_1 et R_2 sont :

$$i_1 = \frac{V_+ - V_-}{R_1}$$

$$i_2 = \frac{V_s - V_-}{R_2}$$

Puisque l'ALI est en rétroaction négative et qu'il est idéal, on a $V_+ = V_-$. Ainsi, V_- est égal à la tension qui se trouve au nœud intermédiaire entre R_1 et R_2 . Il s'agit d'un diviseur de tension qui relie la sortie V_s à la masse via R_2 et R_1 . La tension V_- est donc donnée par :

$$V_- = V_s \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Puisque $V_+ = V_-$ dans un amplificateur opérationnel idéal, on peut écrire :

$$V_e = V_- = V_s \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Maintenant, nous allons résoudre cette équation pour V_s . En isolant V_s , on obtient :

$$V_e = V_s \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$V_s = V_e \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

Cela peut être réécrit comme :

$$V_s = V_e \cdot \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

Le montage non-inverseur applique la tension d'entrée V_e sur la borne positive (+) de l'ALI. Une partie de la sortie V_s est renvoyée à la borne négative (-) via un diviseur de tension constitué de R_1 et R_f .

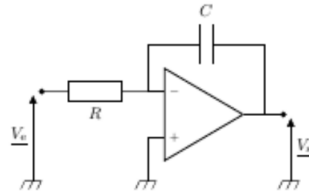


Figure 3: Schéma du circuit

– **Montage intégrateur :**

Pour un amplificateur opérationnel idéal :

- * La tension entre les bornes non-inverseuse et inverseuse est nulle : $V_+ = V_-$.
- * Le courant à l'entrée de l'amp-op est nul : $i_- = 0$.

a. Courant dans la résistance R

Le courant qui traverse la résistance R est donné par la loi d'Ohm :

$$i_R = \frac{V_e(t) - V_-}{R}$$

Comme $V_- = 0$, on a :

$$i_R = \frac{V_e(t)}{R}$$

b. Courant dans le condensateur C

Le courant à travers un condensateur est donné par la relation :

$$i_C = C \frac{dV_C(t)}{dt}$$

$$i_R + i_C = 0$$

On a donc :

$$\frac{V_e(t)}{R} = -C \frac{dV_s(t)}{dt}$$

Réarrangeons l'équation :

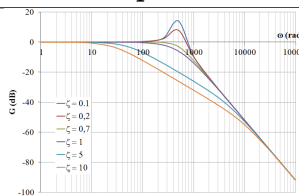
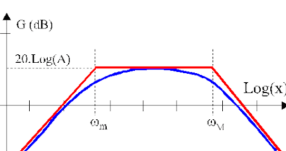
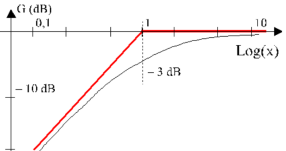
$$\frac{dV_s(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} V_e(t)$$

En intégrant cette équation par rapport au temps, on obtient :

$$V_s(t) = -\frac{1}{RC} \int V_e(t) dt$$

où l'intégration s'effectue sur le temps.

On se reportera à l'étude faite en première année. Seuls les principaux types de filtres d'ordre 1 et 2 sont rappelés ici. Notons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, et Q le facteur de qualité.

	Filtre passe-bas	Filtre passe-bande	Filtre passe-haut
Gabarit			
Filtre d'ordre 1	$\frac{H_0}{1+jx}$	N'existe pas	$\frac{H_0 jx}{1+jx}$
Filtre d'ordre 2	$\frac{H_0}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$	$\frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$	$\frac{H_0(-x^2)}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$

Dans le diagramme de Bode, les pentes des filtres d'ordre 1 ne peuvent pas dépasser ± 20 dB par décade, et les filtres d'ordre 2 ± 40 dB par décade (sauf pour le passe bande).

2 Exercice I : Filtre de Rauch

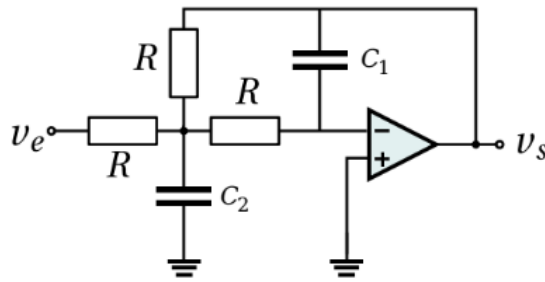


Figure 4: Filtre de Rauch

On appelle A le point où convergent les courants issus des trois résistances. On applique la loi des noeuds au point A , avec $V^- = V^+ = 0$, car l'amplificateur opérationnel est en configuration inverseuse et idéal (entrée différentielle nulle). En utilisant cette condition, on obtient :

$$V^- = 0 = \frac{jC_1\omega V_s + V_A/R}{1/R + jC_1\omega},$$

ce qui donne :

$$V_A = -jRC_1\omega V_s.$$

La loi des noeuds appliquée au point A donne une autre expression de V_A en fonction des autres tensions et résistances :

$$V_A = \frac{V_s/R + V_e/R}{3/R + jC_2\omega},$$

en résolvant cette équation, on déduit la fonction de transfert H :

$$H = -\frac{1}{1 + 3jRC_1\omega + (j\omega)^2 R^2 C_1 C_2}.$$

Ainsi, on identifie les termes suivants :

$$H_0 = -1, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R^2 C_1 C_2}}, \quad Q = \frac{1}{3\omega_0 R C_1}.$$

2.0.1 Détail du calcul de la fonction de Transfert pour un filtre de Rauch

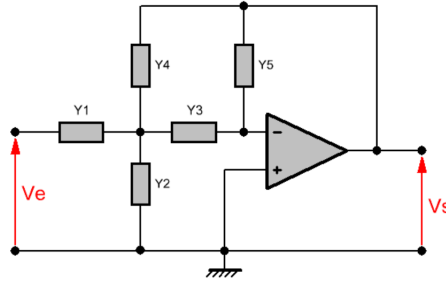


Figure 5: Filtre de Rauch

Tout d'abord, utilisons la loi des nœuds aux points A et B :

$$\text{nœud A : } I_y = I_{y1} + I_{y2} + I_{y3} + I_{y4}$$

$$\text{nœud B : } I_{y3} = I_{y5}$$

D'où : (attention aux signes !)

$$\text{nœud A : } Y_1(V_e - V_A) = Y_2V_A + Y_3V_A + Y_4(V_A - V_S)$$

$$\text{nœud B : } Y_3V_A = -V_S Y_5$$

On peut donc exprimer V_A en fonction de V_S :

$$V_A = -\frac{V_S Y_5}{Y_3}$$

$$Y_1 \left(V_e + \frac{V_S Y_5}{Y_3} \right) = -V_S \frac{Y_5(Y_2 + Y_3)}{Y_3} - \frac{V_S(Y_3 + Y_5)}{Y_3} Y_4$$

$$\frac{Y_1(Y_3 V_e + Y_5 V_S)}{Y_3} = -V_S \frac{Y_5(Y_2 + Y_3) + Y_4(Y_3 + Y_5)}{Y_3}$$

$$Y_1 Y_3 V_e = -V_S (Y_5(Y_2 + Y_3) + Y_4(Y_3 + Y_5) + Y_1 Y_5)$$

$$\frac{V_S}{V_e} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

On retiendra donc que dans le cas général, une structure de Rauch vérifie l'égalité suivante :

$$\frac{V_S}{V_e} = -\frac{Y_1 Y_3}{Y_3 Y_4 + Y_5(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4)}$$

$$Y_1 = \frac{1}{R_1}, \quad Y_2 = jC_1\omega, \quad Y_3 = \frac{1}{R_2}, \quad Y_4 = \frac{1}{R_3}, \quad Y_5 = jC_2\omega$$

$$H(j\omega) = -\frac{1}{1 + jR^2 C_2 \omega \left(\frac{3 + jRC_1\omega}{R} \right)}$$

$$H = -\frac{1}{1 + 3jRC_1\omega + (j\omega)^2 R^2 C_1 C_2}.$$

2.0.2 Expression du gain du filtre

Le gain du filtre est donné par l'expression suivante en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}.$$

2.0.3 Détermination de la pulsation de résonance

La pulsation de résonance est définie comme la pulsation pour laquelle le gain est maximal. Cela se produit lorsque la dérivée de $|H|$ par rapport à ω est nulle. Ainsi, x_{res} vérifie l'équation suivante :

$$\frac{2x}{Q^2} - 4x(1 - x^2) = 0,$$

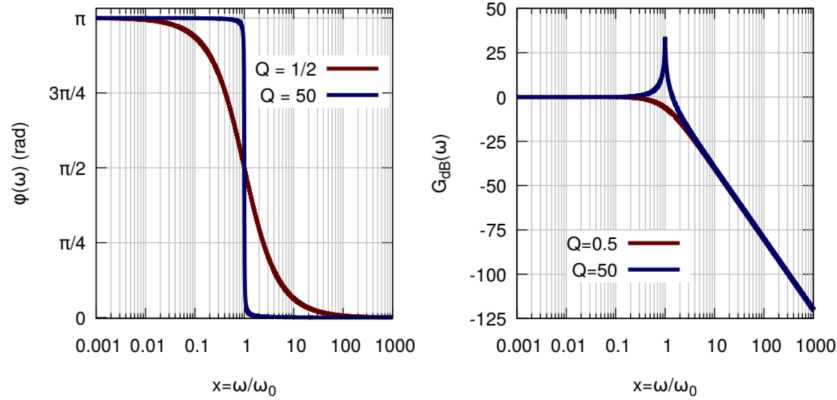
ce qui se réarrange en :

$$x_{\text{res}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Étant donné que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la solution à cette équation existe. Cela signifie que pour des facteurs de qualité Q supérieurs à $\frac{1}{\sqrt{2}}$, le filtre présente une résonance marquée.

2.0.4 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode en amplitude et en phase est tracé pour montrer le comportement du gain et du déphasage en fonction de la fréquence. Les figures ci-dessous représentent ces courbes pour différents facteurs de qualité Q .



2.0.5 Comportement à la résonance

Le gain maximum atteint à la résonance est approximativement :

$$H_{\text{res}} \approx Q.$$

De plus, le déphasage à la fréquence de résonance est :

$$\phi(\omega_0) \approx \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, lorsque Q augmente, le gain en résonance devient plus élevé, et la courbe de Bode en phase montre un déphasage atteignant 90° à la résonance.

Le filtre étant linéaire, il agit indépendamment sur chacune des composantes de Fourier du signal d'entrée. Le signal de sortie s'exprime alors comme une somme pondérée des harmoniques du signal d'entrée :

$$V_s(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} |H((2k+1)2\pi f_0)| \frac{\cos((2k+1)2\pi f_0 t + \phi((2k+1)2\pi f_0))}{2k+1}.$$

Or, on montre que :

$$|H((2k+1)2\pi f_0)| \approx \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Ayant $|H(2\pi f_0)| = Q \gg 1$, on en déduit que le signal de sortie est quasi sinusoïdal.

Ainsi, le signal de sortie s'exprime approximativement comme :

$$V_s(t) \approx \frac{2QE}{\pi} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2QE}{\pi} \sin(2\pi f_0 t).$$

3 Exercice II : Filtre de Butterworth

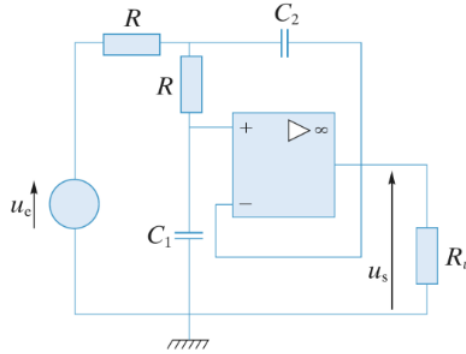


Figure 6: Filtre de Butterworth

3.1 Loi des nœuds en A et B en notation complexe

En A :

$$\frac{u_A - u_e}{R} + \frac{u_A - u_B}{R} + (u_A - u_s)jC_2\omega = 0$$

En B :

$$\frac{u_B - u_A}{R} + jC_1\omega u_B = 0$$

Le régime de fonctionnement étant linéaire, on a $u_B = u^- = u_s$, ce qui donne :

$$u_A(2 + jRC_2\omega) = u_e + u_s(1 + jRC_2\omega)$$

$$u_s(1 + jRC_1\omega) = u_A$$

En posant $x = RC_1\omega$ et $k = \frac{C_2}{C_1}$:

$$u_A(2 + jkx) = u_e + u_s(1 + jkx)$$

$$u_s(1 + jx)(2 + jkx) - (1 + jkx)u_s = u_e$$

On en déduit l'expression de la fonction de transfert du montage :

$$H = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 - kx^2 + 2jx}$$

Le filtre étudié est un passe-bas d'ordre 2.

3.2 Module de la fonction de transfert

On calcule directement le module de la fonction de transfert précédente :

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2kx^2 + k^2x^4 + 4x^2}}$$

Pour obtenir la forme demandée, on doit annuler les termes en x^2 , ce qu'on réalise avec $k = 2$, dont on déduit $C_2 = 2C_1$.

3.3 Expression de ω_0

Il suffit de reprendre l'expression du gain pour trouver :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC_2\sqrt{2}}$$

3.4 Pulsation de coupure

La pulsation de coupure du montage vérifie $|H(\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui donne :

$$4R^4C_1^4\omega_c^4$$

dont on tire $\omega_c = \omega_0$.

4 Exercice III : Association en cascade - Synthèse d'un filtre

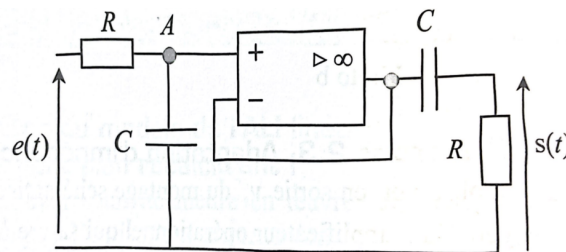


Figure 7: Schéma du circuit

1. Notons $H_{(1)}$ la fonction de transfert du filtre passe-bas (RC) seul (ouvert en sortie) et $H_{(2)}$ la fonction de transfert du filtre passe-haut (CR) seul. Le rôle du suiveur est de permettre d'associer en cascade le filtre (1) et le filtre (2), sans perturber la fonction de transfert du premier filtre (1). En effet, l'impédance d'entrée du suiveur est infinie contrairement à l'impédance d'entrée du filtre (2). On aura ainsi:

$$H = H_{(1)} \cdot H_{(2)} \quad \text{et} \quad G_{DB} = G_{DB(1)} + G_{DB(2)}$$

2. L'impédance d'un condensateur est $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$. À basse fréquence (BF), $|Z_C| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \infty$ et à haute fréquence (HF), $|Z_C| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$. Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert à basse fréquence (Z infinie) et un fil à haute fréquence (Z nulle).

À BF: le condensateur en sortie de l'ALI empêche le passage du courant, donc $i_2 \approx 0$

dans ce condensateur et aussi dans la résistance de droite, soit $s = R_i i_2 \approx 0$. Les basses fréquences sont coupées.

À HF: le condensateur en entrée V^+ se comporte comme un fil. L'entrée (+) est donc reliée à la masse $V^+ \approx 0$.

Le suiveur donne à sa sortie $V_B = V^- = V^+ \approx 0$. Le deuxième condensateur (celui de la sortie) se comporte comme un fil, donc $s \approx V_B \approx 0$. Les basses fréquences et les hautes fréquences sont coupées : il s'agit probablement d'un passe-bande.

3. Étudions le montage dans sa globalité. L'ALI est idéal et l'unique rétroaction sur la borne (-) rend stable. Ces deux conditions permettent d'écrire $V^+ = V^-$.

Calculons V^+ et V^- séparément.

$$V^+ = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} e = \frac{1}{1 + jRC\omega} e$$

en appliquant un pont diviseur de tension car $i^+ = 0$.

$$V^- = V_s \quad \text{avec le fil de rétroaction et } s = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} V_B = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} V^-$$

par pont diviseur de tension.

En remplaçant les expressions obtenues dans $V^- = V^+$, on en déduit :

$$H(j\omega) = \left(\frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \right) \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right) = \frac{jRC\omega}{(1 + jRC\omega)^2}$$

On remarque que $H = H_{(1)} \cdot H_{(2)}$, avec

$$H_{(1)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{du passe bas RC (1) et } H_{(2)} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \text{du passe haut CR (2).}$$

→ ** tudions le comportement asymptotique.**   basse fréquence (BF), $H(j\omega) \sim jRC\omega$ donc

$$|H|_{\omega \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

On retrouve les résultats de la question précédente.

1.   basse fréquence (BF) $H(j\omega) \sim RCj\omega$: soit $s = [RCp]$ en notation de Laplace : c'est une dérivation.
2.   haute fréquence (HF) $H(j\omega) \sim 1/(RCj\omega)$: soit $s = [1/(RCp)]e$ en notation de Laplace : l'opérateur $1/p$ est une intégration.

5. Déterminons les asymptotes.

-   basse fréquence (BF) $H(j\omega) \sim jRC\omega$, donc $G_{BF} = +20 \log(RC\omega)$ et $\varphi_{BF} = \pi/2$.
-   haute fréquence (HF) $H(j\omega) \sim 1/(jRC\omega)$, donc $G_{BF} = 20 \log(1/(RC\omega)) = -20 \log(RC\omega)$ et $\varphi_{BF} = -\pi/2$.

6.

$$|H| = \frac{RC\omega}{1 + (RC\omega)^2} = \frac{x}{1 + x^2}$$

avec $x = RC\omega$. Le maximum est obtenu pour $\frac{d|H|}{dx} = 0$, soit

$$1(1 + x^2) - x \cdot 2x = 0 \quad \text{soit} \quad x^2 - 1 = 0.$$

Comme $x = RC\omega > 0$, il vient $x = 1 = RC\omega_{\max}$, donc

$$\omega_{\max} = \frac{1}{RC}.$$

On en déduit que

$$\frac{|H|_{\max}}{|H(x=1)|} = \frac{1}{2}$$

soit $G_{dB\max} = 10 \log(1/2) = -6$.

Les pulsations de coupure à -3dB se produisent pour

$$|H|_{\text{coupure}} = \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}},$$

soit

$$\frac{x}{1 + x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

En écrivant cette équation sous forme d'équation de degré 2, les racines obtenues sont $x = \sqrt{2} \pm 1$. Les 2 pulsations de coupure sont donc

$$\omega_c = \omega_0(\sqrt{2} \pm 1).$$

On en déduit le facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_{\max}}{\Delta\omega} = \frac{\omega_{\max}}{\omega_c 2 - \omega_c 1} = \frac{1}{2}.$$

7. L'équation différentielle s'obtient directement par transposition de la fonction de transfert

$$H(p) = \frac{RCP}{(1 + RCP)^2} = \frac{s}{e}$$

soit

$$[1 + 2RCP + R^2C^2p^2]s = RCpe.$$

L'équation différentielle est :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} s = 0$$

car $e(t) = E = \text{cte.}$

Le facteur de qualité se trouve en écrivant l'équation différentielle du second ordre sous forme normalisée :

$$s'' + \left(\frac{\omega_0}{Q}\right) s' + \omega_0^2 s = 0$$

avec $\omega_0 = 1/RC$ et $Q = 1/2$.

5 Exercice IV : Oscillateurs

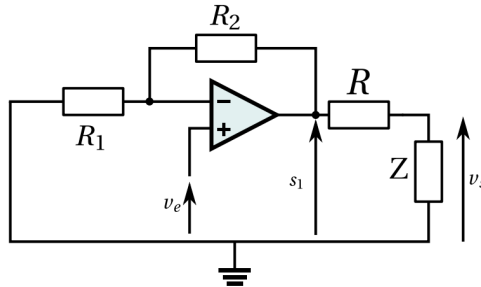


Figure 8: Schéma du circuit

1. L'association en série des deux condensateurs crée une capacité équivalente

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Le circuit est équivalent à :

Avec

$$Z = \frac{L}{C} \frac{1}{jC\omega} + jL\omega,$$

l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et C .

Avec un diviseur de tension, on trouve :

$$v_e = \frac{R_1}{R_2 + R_1} s_1.$$

Un deuxième diviseur de tension en sortie permet de trouver :

$$v_s = \frac{Z}{Z + R} s_1,$$

et donc finalement :

$$H = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{Z}{Z + R} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{1 + \frac{R}{Z}}.$$

Qu'on exprime sous la forme :

$$H = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}.$$

Avec $H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1}$, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

2. Un diviseur de tension permet de calculer :

$$v_r = \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} v_s.$$

On en déduit :

$$T = \frac{v_r}{v_e} = \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} \frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_{C_2}}{Z_{C_2} + Z_{C_1}} H,$$

soit finalement :

$$T = \frac{C_1}{C_1 + C_2} H.$$

3. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, on impose $v_r = v_e$, et on doit donc avoir $T = 1$, ce qui donne :

- Égalité des parties réelles :

$$\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{C_1}{C_1 + C_2} = 1.$$

- Égalité des parties imaginaires : $\omega = \omega_0$.

On en déduit que R_2 doit être telle que :

$$R_2 = R_1 \frac{C_2}{C_1},$$

et que les oscillations ainsi générées auront une pulsation :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$