Premiers outils

1 Alphabet grec

Savoir lire et écrire l'alphabet grec est nécessaire, car ces caractères sont présents dans les énoncés, et voir un signe qu'on se sait pas dire est un gros handicap.

α	A	alpha	a
β	B	bêta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	é
ζ	Z	dzêta	dz
η	H	êta	è
θ	Θ	thêta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	rhô	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	y
φ	Φ	phi	ph
χ	X	khi	ch
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	oméga	ô

2 Sommes et produits

Définition

Soient a et b des entiers avec $a \leqslant b$. $\sum_{i=a}^{b} U_i$ est la somme des U_i, pour i entier allant de a à b.

Par exemple, $U_2+U_3+U_4+U_5 = \sum_{i=2}^{5} U_i$. Ici, on peut utiliser l'indice k plutôt que i, $\left(\sum_{i=2}^{5} U_i = \sum_{k=2}^{5} U_k\right)$, mais il ne faut pas en conclure que l'indice est sans importance.

Par exemple, $\sum_{x=1}^{3} \frac{x}{y} = \frac{1}{y} + \frac{2}{y} + \frac{3}{y} = \frac{6}{y}$ et $\sum_{y=1}^{3} \frac{x}{y} = \frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{11x}{6}$.

Exercice

Compléter : $\sum_{i=3}^{5} i^2 =$ $\sum_{i=3}^{5} i^2 p =$, $\sum_{p=3}^{5} i^2 p =$, $\sum_{j=3}^{5} i^2 p =$

$\left(\sum_{i=0}^{5} U_i\right) + U_6 =$, $\left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) + U_{n+1} =$ et pour $n < p$, $\left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) + \left(\sum_{i=n+1}^{p} U_i\right) =$

Définition

Soient a et b entiers tels que $a \leqslant b$. $\prod_{i=a}^{b} U_i$ est le produit des U_i, pour i entier allant de a à b.

Par exemple, $U_2 \times U_3 \times U_4 \times U_5 = \prod_{i=2}^{5} U_i$

Exercice

simplifier $\prod_{k=2}^{5}\left(1-\frac{1}{k}\right)$

Définition

Pour n entier naturel, la factorielle de n notée $n!$ est défini par $0! = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*, n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Pour $n \geqslant 1$, $n!$ est le produit des entiers compris entre 1 et n. Factorielle est prioritaire sur la multiplication. Ainsi $2 \times 3! =$ et $(2 \times 3)! =$.

Exercice

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$5! = \qquad 0!+1!+2! = \qquad \frac{5!}{6!} =$$

$$35 \times 34! = \qquad \frac{11!}{9!} = \qquad \frac{12!}{11!} \times \frac{22!}{24!} =$$

$$(n+1)n! = \qquad \frac{(n+1)!}{n!} = \qquad \frac{(n+2)!}{n!} =$$

$$n! + n \times n! = \qquad \frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \qquad \frac{n!(n+2)!}{((n+1)!)^2} =$$

3 Logique

3.1 Les assertions

Définition

Une assertion est une phrase dans l'univers mathématique. Chaque assertion a exactement une des deux valeurs de vérité : elle est soit vraie, soit fausse.

Exemples

« 3 est rouge » n'est pas une assertion, c'est hors cadre.

« $2 = 3+$ » n'est pas une assertion, la syntaxe n'est pas respectée.

« $2 + 4 = 12$ » est une assertion fausse.

« $1 + 1 = 2$ » est une assertion vraie.

Définition

Deux assertions A et B sont logiquement équivalentes si elles ont même valeur de vérité. On le note $A \equiv B$.

Exemple

Les assertions $\pi^2 > 9,8$ et $\pi^2 + 0,2 > 10$ sont différentes car la syntaxe diffère. Sans connaître leur valeur de vérité, on peut affirmer qu'elles ont même valeur de vérité, ce qu'on écrira $\pi^2 > 9,8 \ \equiv \ \pi^2 + 0,2 > 10$.

Définitions

Soient A et B des assertions.
La conjonction des assertions A et B est l'assertion notée $A \wedge B$ (Lire A et B). $A \wedge B$ est vraie si et seulement si les deux assertions A et B sont vraies.
La disjonction des assertions A et B est l'assertion notée $A \vee B$ (Lire A ou B). $A \vee B$ est vraie si et seulement si au moins une des assertions A et B est vraie.

Exemples

Donner la valeur de vérité des 4 assertions suivantes.
$(3 = 2)$ $\quad$ $(2 = 2)$ $\quad$ $(3 = 2) \wedge (2 = 2)$ $\quad$ $(3 = 2) \vee (2 = 2)$

Propositions

Soient A, B, C des assertions, V une assertion vraie, F une assertion fausse.
$A \vee B \equiv B \vee A \qquad A \wedge B \equiv B \wedge A$
$A \vee V \equiv V \qquad A \wedge V \equiv A$
$A \vee F \equiv A \qquad A \wedge F \equiv F$
$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$ ce qui permet l'écriture $A \vee B \vee C$
$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$ ce qui permet l'écriture $A \wedge B \wedge C$
$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
$(A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

Note : Pour démontrer la dernière assertion, nous allons utiliser la table de vérité ci-après. Les trois premières colonnes du tableau permettent de considérer tous les cas possibles pour les valeurs de vérité des variables A, B, C. On indique V pour vrai, F pour faux.

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \wedge C$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$(A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
V	V	V					
V	V	F					
V	F	V					
V	F	F					
F	V	V					
F	V	F					
F	F	V					
F	F	F					

Définition

Le contraire de l'assertion A est l'assertion notée $\neg A$, (lire non A). Sa valeur de vérité est différente de celle de A.

Exemple

Le contraire de $\pi^2 > 9,8$ est $\neg(\pi^2 > 9,8)$. L'assertion $\pi^2 \leqslant 9,8$ n'est pas le contraire de $\pi^2 > 9,8$ car les syntaxes diffèrent, mais c'est une assertion équivalente, et pour la clarté du propos, on préfèrera toujours une assertion équivalente simple à l'original.

Propositions

Soient A, B des assertions, V une assertion vraie, F une assertion fausse.
$\neg V \equiv F \qquad \neg F \equiv V \qquad \neg(\neg A) \equiv A$
$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Note : le symbole $\neg$ est prioritaire sur $\vee$ et $\wedge$, mais souvent, j'ai mis des parenthèses pour éviter les ambigüités. La dernière des propositions s'écrit $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

Démonstration
Réalisons une table de vérité pour démontrer la dernière équivalence.

Définition
Soient A, B des assertions. L'assertion $(\neg A) \vee B$ se lit « A implique B » et est notée $A \Rightarrow B$.

Note : Une implication est une assertion : elle peut donc être vraie ou fausse. On se gardera à l'avenir d'écrire $\Rightarrow$ comme abréviation de « donc ».

Réalisons sa table de vérité :

A	B	$\neg A$	$A \Rightarrow B$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Exercice
Donner la valeur de vérité des implications suivantes :
$(\pi > 2) \Rightarrow (\pi > 1)$ $\quad$ $(\pi > 2) \Rightarrow (\pi > 3)$ $\quad$ $(\pi > 2) \Rightarrow (\pi > 4)$ $\quad$ $(\pi > 4) \Rightarrow (\pi = -1)$

Méthode
Pour montrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie, on ne regarde que le cas où A est vraie. En effet, si A est fausse, $\neg A$ est vraie, et $A \Rightarrow B$ est vraie. Il n'y a donc rien à faire dans le cas où A est fausse.
Si A est vraie, l'implication a la valeur de vérité de B. On pourra donc montrer que B est vraie.
En pratique, on pourra commencer la rédaction par « Supposons A vraie. », et après déductions, conclure par « alors B est vrai ».

Exemple
Soit n un entier naturel. Montrer que « $n \geqslant 4 \Rightarrow 3n + 2 \geqslant 11$ »

Proposition
Soient A et B des assertions. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge (\neg B)$

Démonstration
$\neg(A \Rightarrow B) \equiv$

Définition
La réciproque de $A \Rightarrow B$ est $B \Rightarrow A$.

Exemple
Donner un exemple où $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$ on des valeurs de vérité différentes.

Définition
La contraposée de $A \Rightarrow B$ est $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$.

Proposition
Une implication et sa contraposée sont logiquement équivalentes.

Démonstration
$(\neg B) \Rightarrow (\neg A) \equiv$

Note : S'il est demandé de montrer une implication, on peut donc démontrer sa contraposée.

Exemple de démonstration par contraposition
Soient x un réel. Montrer que si $x^2 + 6x < 0$, alors $x < 0$.

Démonstration par l'absurde
Principe : Pour montrer une assertion A , on montre $\neg A \Rightarrow F$, où F est une assertion fausse.
En effet $\neg A \Rightarrow F \equiv (\neg(\neg A)) \vee F \equiv A \vee F \equiv A$.

Exercice
Montrer que l'équation $2x^3 + x^2 - 5 = 0$ n'a pas de solution entière.

Vocabulaire
Considérons une implication $A \Rightarrow B$ vraie.
A est une condition suffisante pour B. En effet, savoir que A est vraie suffit à pouvoir affirmer que B est vraie.
B est une condition nécessaire à A. Si on pense à la contraposée, savoir B fausse permet d'affirmer que A est fausse. Il est donc nécessaire d'avoir B vraie pour espérer qu'il en soit de même pour A.

4 Les Ensembles

Qu'y a-t-il de commun entre les nombres, les points du plan, les vecteurs, les fonctions, et tous les objets étudiés en cours de mathématiques ? On peut toujours les considérer comme éléments d'un ensemble. De même qu'on écrit $2 \in \mathbb{N}$ pour dire que 2 est un entier naturel, on traduira plus tard que f est une fonction affine en écrivant $f \in \mathbb{R}_1[x]$. La relation $\in$ introduite en 1889 par le mathématicien et linguiste italien *Guiseppe Peano* est en ce sens fondamentale.

Définitions
L'assertion $x \in E$ se lit « L'objet x appartient, est élément de l'ensemble E ».
L'assertion $x \notin E$ se lit « L'objet x n'est pas élément de l'ensemble E ».
Si tous les éléments d'un ensemble E sont éléments de l'ensemble F, on dit que E est une partie de F, ou que E est inclus dans F, ce qu'on note $E \subset F$
Des ensembles E et F sont égaux s'ils ont les mêmes éléments : $E = F \equiv (E \subset F) \wedge (F \subset E)$

Illustration : un premier diagramme de Venn

Méthode
Pour montrer $E \subset F$ on pourra commencer par « Soit x un élément de E », et après déductions conclure par « x est élément de F ».

4.1 Des ensembles usuels

On utilisera les ensembles suivants.
$\varnothing$ est l'ensemble vide : il n'a aucun élément.
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels : ses éléments sont $0; 1; 2; \ldots$
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs : ses éléments sont les entiers naturels et leurs opposés.
$\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels, ceux qu'on peut associer aux points d'une droite graduée.
Certains d'entre vous ont déjà croisé l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

4.2 Ensemble ayant un nombre fini d'éléments

On peut former un ensemble en plaçant entre accolades un nombre fini d'objets mathématiques qui seront ses éléments. Par exemple $E = \left\{2; \dfrac{3}{4}; \mathbb{N}\right\}$. On note alors $\operatorname{card}(E)$ le nombre d'éléments de E. Par exemple $\operatorname{card}\left(\left\{2; \dfrac{3}{4}; \mathbb{N}\right\}\right) = 3$, $\operatorname{card}(\varnothing) = 0$.

4.3 Ensemble des éléments d'un ensemble vérifiant une relation

Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble F des éléments de E pour lesquels une relation donnée est vérifiée. Par exemple, $[2; 5[= \{x \in \mathbb{R} | 2 \leqslant x < 5\}$
(Ici, $F = [2; 5[$ et $E = \mathbb{R}$ et $|$ se lit « pour lesquels »).

Pour a et b entiers tels que $a \leqslant b$, $[\![a; b]\!] = \{n \in \mathbb{Z} | a \leqslant n \leqslant b\}$. $\operatorname{card}([\![a; b]\!]) = b - a + 1$.
Par exemple $[\![-1; 2]\!] = \{-1; 0; 1; 2\}$. On a bien $\operatorname{card}([\![-1; 2]\!]) = 2 - (-1) + 1$.

On utilisera * pour priver un ensemble de 0, $+$ pour se limiter aux réels positifs ou nul, $-$ pour les réels négatifs ou nul. Ainsi $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$, $\mathbb{R}_- =]-\infty; 0]$, $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$.

4.4 Opérations

Définitions
Soient E et F des ensembles. On peut former les ensembles suivants :
L'intersection de E et F, noté $E \cap F$ est $\{x | x \in E \wedge x \in F\}$
L'union de E et F, noté $E \cup F$ est $\{x | x \in E \vee x \in F\}$
La différence de E et F, notée $E \backslash F$ est $\{x | x \in E \wedge x \notin F\}$, et on lira « E privé de F ».
Si F est une partie de E, le complémentaire de F dans E est l'ensemble $E \backslash F$ noté $\overline{F}$: cette notation n'est possible que si E est un ensemble clairement identifié. Ce sera le cas pour les événements, qui seront des parties de l'univers Ω.

Illustration avec un diagramme de Venn :

Exercice

Simplifier : $[0;3[\cap]1;5] =$ $[0;3[\cup]1;5] =$ $[0;3[\setminus]1;5] =$

Propriétés

Soient A, B, C des parties d'un ensemble Ω.
$A\cup B = B\cup A$ et $A\cap B = B\cap A$
$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ ce qui permet l'écriture $A\cup B\cup C$
$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$ ce qui permet l'écriture $A\cap B\cap C$
$(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$
$(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$
$\overline{\left(\overline{A}\right)} = A$
$\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$
$\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$

Note : On remarque la proximité des notations ($\wedge$ et $\cap$), ainsi que ($\vee$ et $\cup$) et des propriétes : la logique et les ensembles sont curieusement proches. Cela est utile pour démontrer les égalités ci-dessus. Montrons par exemple que $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$.

$$x\in(A\cup B)\cap C \equiv (x\in A\cup B)\wedge(x\in C)$$
$$\equiv$$

Montrons que $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$. On pensera à utiliser que $x\in\overline{A}\equiv\neg(x\in A)$.
$x\in\overline{A\cup B}\equiv\ldots.$

4.5 L'ensemble des parties de E

Définition

Soit E un ensemble. On peut former l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont les parties de E, ie $A\in\mathcal{P}(E)\equiv A\subset E$.

Exemple

soit E={1 ;2 ;3}. Écrire les huit éléments de $\mathcal{P}(E)$.

4.6 Coefficients binomiaux

Définition

Soient n et p des entiers naturels. On note $\binom{n}{p}$ et on lit « p parmi n » le nombre de parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n.

Exemple

Ecrire toutes les parties à 2 éléments de $[\![1;5]\!]$.

Par conséquent $\binom{5}{2} =$. D'autre part, $\binom{5}{1} =$ et $\binom{5}{0} =$.

Propositions

Soient n et p des entiers naturels.

1. Pour $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$.
2. Si $0 \leqslant p \leqslant n$, alors $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.
3. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Démonstration du deuxième point

Les parties à $n - p$ éléments de $[\![1;n]\!]$ sont les complémentaires des parties à p éléments de cet ensemble : il y a donc autant.

Relation de Pascal

Soient n et p des entiers naturels. $\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}$

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal $n + 1$. Appelons Charlotte un des éléments de E. E est donc l'union disjointe de $\{\text{Charlotte}\}$ et d'un ensemble F de cardinal n.

Considérons les parties de E à $p + 1$ éléments. Il y en a $\binom{n+1}{p+1}$.

On peut les classer en deux catégories, selon que Charlotte est ou non élément de la partie.

Les parties de E de cardinal $p + 1$ contenant Charlotte sont celles de la forme $A \cup \{\text{Charlotte}\}$ où A est une partie de F à p éléments. Il y en a donc $\binom{n}{p}$.

Les parties de E de cardinal $p + 1$ sans Charlotte sont les parties de F à $p + 1$ éléments. Il y en a donc $\binom{n}{p+1}$, d'où le résultat.

Exercice

Écrire comme une combinaison $s = \binom{19}{6} + 2\binom{19}{7} + \binom{19}{8}$

Note : La relation de Pascal permet de calculer toutes les valeurs des $\binom{n}{p}$ dans le triangle de Pascal ci-après, une fois remplies la première ligne et la première colonne.

$_n\backslash^p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										

Proposition

Soient n et p des entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Note : La démonstration sera effectuée ultérieurement.

Exemples de calcul

$\displaystyle\binom{7}{3} =$ et pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\binom{n}{2} =$

5 Factoriser, développer

La multiplication des réels est commutative, *ie* pour tous réels x et y, $xy = yx$.
D'autre part, L'opposé d'un réel x, noté $-x$, vérifie $-x = (-1) \times x$.
On admet aussi la formule fondamentale : Soient a, b, c des nombres réels. $a \times c + b \times c = (a+b) \times c$.
La partie gauche de cette égalité est la somme de ac et bc : c'est une expression développée.
La partie droite est un produit, c'est une forme factorisée.
Cette formule est naturelle dans la mesure où elle revient à compter des c.

Ces propriétés permettent de retrouver :

1. $(a+b)(c+d) =$
2. $(a+b)(c-d) =$
3. $(a-b)(c-d) =$
4. $-(a-b) =$

les identités remarquables :

1. $(a+b)^2 =$

2. $(a-b)^2 =$
3. $(a+b)(a-b) =$

D'autres formules qu'il faut savoir retrouver :

1. $(a+b+c)^2 =$
2. $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$
3. $(1-a)(1+a+a^2+a^3) =$

Exercice

Soient a et b des réels. Développer :

1. $(a+b)^2 =$
2. $(a+b)^3 =$
3. $(a+b)^4 =$

Conjecturer l'écriture développée de $(a+b)^7 =$

Formule du binôme

Soit n un entier naturel, a et b des réels. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Note : La démonstration sera effectuée plus tard par récurrence.

5.1 Produit cartésien

Un couple $(a;b)$ est une liste ordonnée des deux objets a et b. Ainsi $(2;3) \neq (3;2)$. $(4;4)$ est un couple de réels. $(a;b;c)$ est appelé triplet, et une liste de n objets un n-uplet.

Définition

Le produit cartésien de deux ensembles E et F est l'ensemble noté $E \times F$ (lire E croix F) dont les éléments sont les couples $(e;f)$ pour lesquels e est élément de E, et f est élément de F. Ainsi $E \times F = \{(e;f), e \in E \text{ et } f \in F\}$

Exemple

Soient $E = \{1;2;3\}$ et $F = \{7;9\}$. Écrire tous les éléments de $E \times F$.

En particulier, l'ensemble $E \times E$ est noté E^2. On écrira $(4;7) \in \mathbb{R}^2$.

Note : on généralise cette définition à davantage d'ensembles.
Ainsi $E \times F \times G = \ldots$
et par exemple $(0;1;\sqrt{2};3) \in \mathbb{R}^4$

6 Les quantificateurs

Définitions

On note $P(x)$ une assertion qui dépend de la variable x. Par exemple $P(x) = (x^2 < 5)$.
$\forall$ est le quantificateur universel. On écrit $(\forall x \in E, P(x))$ pour dire « Pour chaque élément x de E, $P(x)$ est vraie ».
$\exists$ est le quantificateur existentiel. On écrit $(\exists x \in E, P(x))$ pour dire « Il existe au moins un

élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie ».

Exemples

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 7$
2. $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 7$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > -3$
4. $\exists x \in \mathbb{N}, x < -3$

Rédaction des assertions avec plusieurs quantificateurs

Il faut retenir que l'ordre est très important, et que chaque virgule entre quantificateurs peut se lire comme « les variables précédentes étant fixées ».
Voici une assertion : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y > x$

Voici sa lecture commentée. Pour chaque entier naturel x, (à partir de ce moment, x est fixé), il existe un réel y, (dont le choix peut de faire en fonction de x puisque ce choix intervient une fois x fixé), de sorte que y soit strictement supérieur à x.
Quelle est a valeur de vérité de cette assertion ?

Exemples

Lire les assertions suivantes et dire si elles sont vraies ou fausses.

1. $\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x$
2. $\forall y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, y > x$
3. $\exists y \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{N}, y > x$
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, n \leqslant x \leqslant n + 0,3$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, x \leqslant n \leqslant x + 0,3$

Propositions

$\neg(\forall x \in E, P(x)) \equiv \exists x \in E, \neg P(x)$
$\neg(\exists x \in E, P(x)) \equiv \forall x \in E, \neg P(x)$

Exemples

Écrire des assertions logiquement équivalentes au contraire des assertions suivantes, et donner leurs valeurs de vérité.

1. $\exists n \in \mathbb{N}, n + 6 = n^2$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 7 > 3x$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, (x < 3 \;\Rightarrow\; x + 1 < 5)$

Contraire d'une assertion longue

Il est aisé d'écrire le contraire d'assertions avec plusieurs quantificateurs, même si on ne les comprend pas. Il suffit de faire « bloc par bloc ».
Voici une assertion : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N) \Rightarrow |U_n - l| \leqslant \varepsilon$
Son contraire est équivalent à :

Existence et unicité

« $\exists!$ » est une notation pour préciser qu'il existe un et un seul, un unique.
Par exemple, l'assertion $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$ est vraie. L'assertion $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 9$ est fausse.
Considérons l'assertion $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, x + y = 0$. Elle signifie que tout réel il existe un unique autre réel, de sorte que leur somme soit nulle. L'unicité permet de nommer le second réel « en fonction du premier », (Ici y est l'opposé de x) et le noter (Ici, $y = -x$)