La función de onda. La interpretación de Copenhage. Principio de superposición.

Las partículas, además de tener asociada una longitud de onda y una frecuencia, si tienen realmente una naturaleza ondulatoria, deben estar descritas mediante una función de onda. Podemos pensar en la radiación electromagnética, cuya función de onda (la propiedad que varía en un determinado punto cuando la onda pasa por dicho punto) es el campo eléctrico o el magnético. En las ondas que se propagan en la superficie del agua la función de onda será la altura del agua. En el sonido la función de onda será la presión o la densidad, ya que están relacionadas. De esta forma, todas las ondas, aunque sean de naturaleza muy distinta, se describen mediante una función de onda.

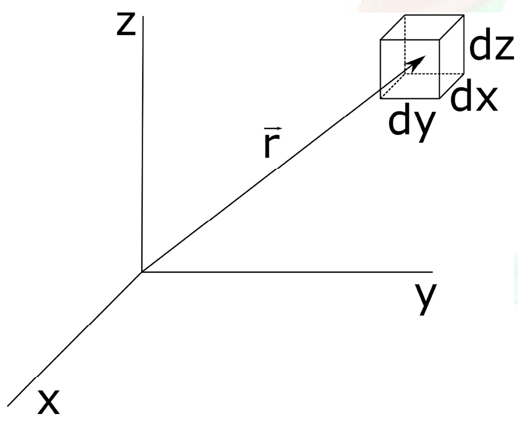
Por ejemplo, una partícula podría estar descrita mediante la siguiente función de onda, plana y armónica:

$$\psi(\vec{r},t) = A \exp\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)$$

donde el vector de onda y la frecuencia se obtienen a partir de las relaciones de de Broglie-Einstein: $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ y $\omega = E/\hbar$. Vamos a ver qué significado puede tener una función de onda para una partícula. Si pensamos en el electromagnetismo, vimos que la intensidad de la radiación en la pantalla en el experimento de Young se podía interpretar como la densidad de probabilidad de que un fotón incidiera sobre un punto de la pantalla. Si recordamos que la intensidad de la radiación electromagnética es proporcional al cuadrado del campo eléctrico, y que el campo eléctrico se puede considerar como una función de onda para las ondas electromagnéticas, podemos interpretar la función de onda de una partícula de forma análoga si decimos que su cuadrado es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en un punto determinado. Para formar el cuadrado de la función de onda multiplicamos la función de onda por su complejo conjugado para obtener una cantidad real. Con esta interpretación, el módulo al cuadrado de la función de onda multiplicado por un elemento de volumen $dxdydz = d^3\vec{r}$, es decir:

$$|\psi(\vec{r},t)|^2 \, d^3\vec{r} = \psi^*(\vec{r},t)\psi(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = \left\{\mathrm{Re}^2\left[\psi(\vec{r},t)\right] + \mathrm{Im}^2\left[\psi(\vec{r},t)\right]\right\}\, d^3\vec{r},$$

será la probabilidad de encontrar la partícula en el elemento de volumen $d^3\vec{r}$ alrededor de la posición $\vec{r}$ en el instante t. Podemos ver el elemento de volumen en la siguiente figura.



Esta interpretación probabilística de la función de onda se debe a Max Born y es parte de lo que se conoce como la interpretación de Copenhague de la mecánica cuántica, que es la más extendida, aunque no es la única. Debido a que la densidad de probabilidad viene dada por el módulo al cuadrado de la función de onda, la función de onda se denomina en ocasiones la amplitud de probabilidad. De acuerdo con esta interpretación de la teoría cuántica, sólo en determinadas ocasiones seremos capaces de predecir con certeza el resultado de una medida, mientras que lo normal será que sólo podamos calcular probabilidades sobre los resultados de las medidas. Las probabilidades se calcularán mediante expresiones similares a la ecuación anterior, es decir, como el módulo al cuadrado de una cierta función. Podemos deducir una propiedad importante y es que la función de onda está definida salvo un factor de fase arbitrario. Es decir, que si una función de onda $\psi(\vec{r},t)$ describe el estado de una partícula en el instante t, la función $\psi'(\vec{r},t) = e^{i\varphi}\psi(\vec{r},t)$ (donde φ es una constante real arbitraria) describe el mismo estado para la partícula.

Un aspecto importante es que si queremos que la teoría cuántica sea capaz de explicar los fenómenos de interferencia y difracción que se observan para las partículas, las funciones de onda deben verificar el Principio de superposición. Si dos funciones de onda $\psi_A(\vec{r},t)$ y $\psi_B(\vec{r},t)$ describen dos posibles estados de una partícula, la función de onda $\psi_A(\vec{r},t) + \psi_B(\vec{r},t)$ (o cualquier combinación lineal de las dos funciones) también debe describir un posible estado de la partícula. El que se puedan sumar amplitudes de probabilidad (funciones de onda) es lo que permite que se puedan dar fenómenos de interferencia.

Vamos a ver a continuación cómo se componen las amplitudes de probabilidad. Supongamos que en el experimento de Young cerramos la rendija inferior, manteniendo la superior abierta, y que en este caso la función de onda que describe las partículas en la región de la derecha donde se encuentra la pantalla vale $\psi_A(\vec{r},t)$. De esta forma, la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en dicha región valdrá $|\psi_A(\vec{r},t)|^2$. Podemos utilizar esta densidad de probabilidad para calcular la distribución de partículas en la pantalla en este caso. Supongamos ahora que cerramos la rendija superior y dejamos la inferior abierta y que en este caso las partículas vienen descritas en la región de la derecha mediante la función de onda $\psi_B(\vec{r},t)$, de modo que la densidad de probabilidad de encontrar una partícula en dicha región ahora será distinta y valdrá $|\psi_B(\vec{r},t)|^2$. Pues bien, cuando las dos rendijas estén abiertas las partículas estarán descritas en la región de la derecha mediante la función de onda $\psi_A(\vec{r},t) + \psi_B(\vec{r},t)$. Podemos calcular la probabilidad de encontrar una partícula en el elemento de volumen $d^3\vec{r}$ alrededor de la posición $\vec{r}$ en esta nueva situación:

$$\begin{aligned}|\psi_A(\vec{r},t) + \psi_B(\vec{r},t)|^2 \; d^3\vec{r} &= [\psi_A^*(\vec{r},t) + \psi_B^*(\vec{r},t)]\,[\psi_A(\vec{r},t) + \psi_B(\vec{r},t)] \; d^3\vec{r} \\ &= \left(|\psi_A(\vec{r},t)|^2 + |\psi_B(\vec{r},t)|^2 + \psi_A^*(\vec{r},t)\psi_B(\vec{r},t) + \psi_A(\vec{r},t)\psi_B^*(\vec{r},t)\right) \; d^3\vec{r}\end{aligned}$$

Los dos primeros términos son los que han aparecido anteriormente cuando sólo una de las dos rendijas está abierta y la otra cerrada. Los nuevos términos que aparecen son términos cruzados que mezclan las dos funciones $\psi_A(\vec{r},t)$ y $\psi_B(\vec{r},t)$ y son los que explican el patrón de interferencia que se observa en la pantalla.

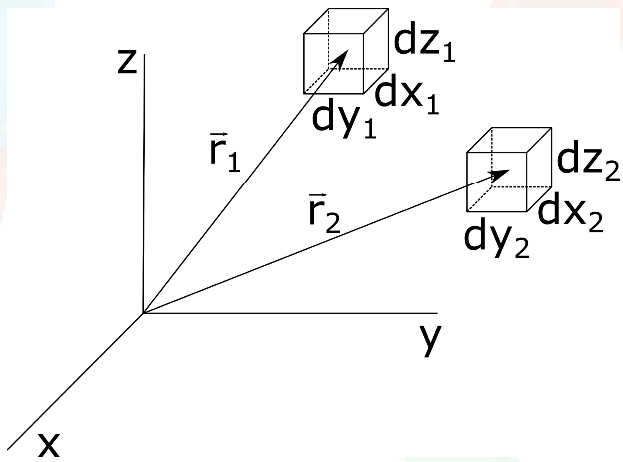
Vamos, por último, a estudiar otra propiedad de las funciones de onda y es cómo se utilizan cuando queremos describir el estado de más de una partícula. Supongamos el caso más sencillo de dos partículas que notaremos como 1 y 2. Si las dos partículas no interaccionan entre sí las podemos describir por separado, de modo que la partícula

1 estará descrita mediante una función de onda $\psi_1(\vec{r}_1, t)$, mientras que la otra partícula estará descrita mediante otra función de onda distinta $\psi_2(\vec{r}_2, t)$. En este caso sencillo en el que las partículas no interaccionan, podemos definir una función de onda total del sistema formado por las dos partículas como $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t) = \psi_1(\vec{r}_1, t)\psi_2(\vec{r}_2, t)$, es decir, el producto de las dos funciones de onda. De este modo, la probabilidad se comporta como cabría esperar. La probabilidad de encontrar a la partícula 1 en el elemento de volumen $d^2\vec{r}_1$ alrededor de la posición $\vec{r}_1$ en el instante t y simultáneamente a la partícula 2 en el elemento de volumen $d^3\vec{r}_2$ alrededor de la posición $\vec{r}_2$ vendrá dada por el producto de las probabilidades, ya que como las partículas no interaccionan estos dos sucesos son estadísticamente independientes:

$$|\psi_1(\vec{r}_1, t)|^2 \ d^3\vec{r}_1 \ |\psi_2(\vec{r}_2, t)|^2 \ d^3\vec{r}_2 = |\psi_1(\vec{r}_1, t)\psi_2(\vec{r}_2, t)|^2 \ d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 = |\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)|^2 \ d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$

Si tal como hemos supuesto las dos partículas no interaccionan en ningún momento, la función de onda total será siempre el producto de las dos funciones de onda. Sin embargo, si inicialmente las dos partículas están aisladas y posteriormente interaccionan, en el instante inicial será cierto que la función de onda total es el producto de dos funciones de onda, una para cada partícula, pero esta forma no se mantendrá en el tiempo cuando las dos partículas evolucionen. Es decir que, en general, la función de onda que describe el conjunto de dos partículas en el instante t, $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$, no se puede descomponer como producto de una función que depende de $\vec{r}_1$ y t por otra función que depende de $\vec{r}_2$ y t. En este caso se dice que las dos partículas están entrelazadas. La interpretación de la función de onda para dos partículas, $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$, será que su módulo al cuadrado nos da la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula 1 en la posición $\vec{r}_1$ y simultáneamente a la partícula 2 en la posición $\vec{r}_2$. De modo que, al igual que antes, la probabilidad de encontrar a la partícula 1 en un elemento de volumen $d^3\vec{r}_1$ alrededor de la posición $\vec{r}_1$ y simultáneamente a la partícula 2 en un elemento de volumen $d^3\vec{r}_2$ alrededor la posición $\vec{r}_2$ será:

$$|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)|^2 \ d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2$$



Lo importante es darnos cuenta de que la función de onda que tenemos que utilizar para describir el conjunto de dos partículas, $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t)$, no se propaga en el espacio ordinario, sino en el espacio de la configuración de las dos partículas. Esto produce fenómenos extraños como que al medir sobre una partícula podamos producir cambios en la otra de forma instantánea.