Conservación de la probabilidad. Densidad de corriente de probabilidad.

Una vez que hemos encontrado la ecuación que rige la evolución temporal de la función de onda $\psi(\vec{r},t)$ podemos analizar cómo evoluciona la densidad de probabilidad $\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2 = \psi^*(\vec{r},t)\,\psi(\vec{r},t)$. Vamos a cacular la derivada de la densidad de probabilidad respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} &= \frac{\partial\psi^*(\vec{r},t)}{\partial t}\psi(\vec{r},t) + \psi^*(\vec{r},t)\frac{\partial\psi(\vec{r},t)}{\partial t} = \\ &= -i\frac{\hbar}{2m}\psi\nabla^2\psi^* + \frac{i}{\hbar}\psi V(\vec{r})\,\psi^* + i\frac{\hbar}{2m}\psi^*\nabla^2\psi - \frac{i}{\hbar}\psi^* V(\vec{r})\,\psi\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la ecuación de Schrödinger y hemos supuesto que, lógicamente, el potencial es una función real (hemos omitido los paréntesis $(\vec{r},t)$ por claridad). Los términos que dependen del potencial se anulan y queda:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} &= -i\frac{\hbar}{2m}\psi(\vec{r},t)\,\nabla^2\psi^*(\vec{r},t) + i\frac{\hbar}{2m}\psi^*(\vec{r},t)\,\nabla^2\psi(\vec{r},t) = \\ &= -\vec{\nabla}\cdot\left[\frac{i\hbar}{2m}\psi(\vec{r},t)\,\vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t) - \frac{i\hbar}{2m}\psi^*(\vec{r},t)\,\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t)\right]\end{aligned}$$

Esta es una ecuación de continuidad, que se puede escribir de la forma:

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) = 0$$

donde:

$$\vec{j}(\vec{r},t) = \frac{i\hbar}{2m}\psi(\vec{r},t)\,\vec{\nabla}\psi^*(\vec{r},t) - \frac{i\hbar}{2m}\psi^*(\vec{r},t)\,\vec{\nabla}\psi(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\psi^*(\vec{r},t)\,(\frac{-i\hbar\vec{\nabla}}{m})\psi(\vec{r},t)\right\}$$

Es razonable denominar a $\vec{j}(\vec{r},t)$ como la densidad de corriente de probabilidad. La consecuencia más inmediata de que $\rho(\vec{r},t)$ satisfaga una ecuación de continuidad es que su integral en todo el espacio se conserva:

$$\int d^3\vec{r}\;\rho(\vec{r},t)\ \text{ es constante en el tiempo}$$

Por tanto, si en el instante inicial $t=0$ normalizamos la función de onda $\psi(\vec{r},0)$, de modo que la integral anterior para $\rho(\vec{r},0)$ sea igual a la unidad, seguirá siendo igual a la unidad en cualquier instante posterior t.

En la sección anterior definimos el operador momento $\hat{\mathbf{p}}$, como $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}$. Si dividimos este operador por la masa de la partícula podemos definir de forma equivalente un operador velocidad de la forma:

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{-i\hbar\vec{\nabla}}{m}$$

Podemos escribir, por tanto, la densidad de corriente de probabilidad de la forma:

$$\vec{j}\,(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left(\psi^*\,(\vec{r},t)\,\hat{\mathbf{v}}\psi\,(\vec{r},t)\right)$$

Esta expresión recuerda a la de una densidad de corriente, escrita como el producto de la densidad por el campo de velocidades.

Antes de terminar, podemos profundizar un poco más sobre la ecuación de continuidad y la densidad de corriente de probabilidad escribiendo la función de onda de otra forma. La función de onda se puede escribir, sin pérdida de generalidad, de la siguiente forma:

$$\psi(\vec{r},t) = A(\vec{r},t)e^{\frac{i}{\hbar}S(\vec{r},t)}$$

donde $A(\vec{r},t)$ y $S(\vec{r},t)$ son dos funciones reales. En este caso, la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula en un punto determinado viene dada por el cuadrado de la función $A(\vec{r},t)$, es decir, $\rho(\vec{r},t) = |\psi(\vec{r},t)|^2 = A^2(\vec{r},t)$. Por otro lado, podemos obtener la densidad de corriente de probabilidad:

$$\begin{aligned}
\vec{j}\,(\vec{r},t) &= \mathrm{Re}\left(\psi^*\,(\vec{r},t)\,(\frac{-i\hbar\vec{\nabla}}{m})\psi\,(\vec{r},t)\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-i\hbar}{m}Ae^{-\frac{i}{\hbar}S}\;\vec{\nabla}\left(Ae^{\frac{i}{\hbar}S}\right)\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{-i\hbar}{m}A\vec{\nabla}A + A^2\frac{\vec{\nabla}S}{m}\right) = A^2\frac{\vec{\nabla}S}{m} = A^2(\vec{r},t)\frac{\vec{\nabla}S(\vec{r},t)}{m}
\end{aligned}$$

Podemos interpretar este resultado de la siguiente forma. La densidad de corriente de probabilidad es igual a la densidad de probabilidad $\rho(\vec{r},t) = A^2(\vec{r},t)$ multiplicada por $\vec{\nabla}S(\vec{r},t)/m$. Este término debe ser el campo de velocidades con el que se mueve la densidad de probabilidad. Es decir, que podemos hacer un símil de la probabilidad con un fluido. La densidad de probabilidad sería como la densidad del fluido, mientras que la función $\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}S(\vec{r},t)/m$ sería como el campo de velocidades con el que se mueve cada punto del fluido. El resultado que hemos obtenido lo podíamos haber intuido. La función de onda contiene la información tanto sobre la posición como sobre la velocidad de la partícula. La información sobre la posición de la partícula está en la densidad de probabilidad, es decir, en el módulo al cuadrado de la función de ona. Por tanto, la información sobre la velocidad debe estar contenida en la fase de la función de onda, ya que es la parte que desaparece al tomar el módulo al cuadrado de la función de onda.

Por último, podemos pensar que el hecho de que la densidad de corriente de probabilidad satisfaga una ecuación de continuidad es totalmente razonable. Si la función de onda está normalizada, la integral de la densidad de probabilidad en todo es espacio será siempre igual a la unidad. Es decir que, en todo momento, la partícula debe estar en algún sitio: no puede desaparecer. Este hecho puede ser una desventaja ya que la ecuación de Schrödinger no podrá describir procesos de creación y aniquilación de partículas.