Bases en la notación de Dirac. Cambio de base.

El concepto de base o representación en el espacio de estados $\mathfrak{E}$ es análogo al que vimos anteriormente para un espacio de Hilbert, ya que lo único que hemos hecho es establecer una correspondencia biunívoca entre funciones y vectores ket del espacio de estados. Veremos que trabajar con bases en notación de Dirac es muy sencillo una vez que introduzcamos el concepto de relación de cierre de la base.

Podemos comenzar con las bases discretas y, al igual que ya hicimos, definiendo un conjunto ortonormal discreto de vectores ket $\{|u_i\rangle\}$ del espacio de estados. El conjunto anterior será ortonormal si verifica la siguiente condición:

$$\langle u_i|u_j\rangle = \delta_{ij}$$

De la misma forma, diremos que el conjunto anterior es una base ortonormal discreta si cualquier ket $|\psi\rangle \in \mathfrak{E}$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de los vectores $|u_i\rangle$, de la forma:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle$$

Los coeficientes se obtienen de la misma forma. En primer lugar cambiamos la variable i del sumatorio por j:

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |u_j\rangle$$

Multiplicamos ahora ambos miembros por la izquierda por el bra $\langle u_i|$:

$$\langle u_i|\psi\rangle = \langle u_i| \sum_j c_j |u_j\rangle = \sum_j c_j \langle u_i|u_j\rangle = \sum_j c_j\delta_{ij} = c_i$$

De modo que, como era de esperar:

$$c_i = \langle u_i|\psi\rangle$$

Vamos a introducir ya uno de los conceptos más útiles de la notación de Dirac, como es la relación de cierre. En la expresión del vector $|\psi\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|u_i\rangle$ vamos a introducir el valor de los coeficientes que acabamos de obtener:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |u_i\rangle = \sum_i \underbrace{\langle u_i|\psi\rangle} |u_i\rangle$$

Lo que hemos marcado es un número que podemos colocar a la derecha del ket $|u_i\rangle$, de modo que queda:

$$|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle \langle u_i|\psi\rangle = \left(\sum_i |u_i\rangle \langle u_i|\right) |\psi\rangle$$

Lo que hemos separado con un paréntesis en el último término es un operador que, actuando sobre el vector $|\psi\rangle$ nos da el mismo vector $|\psi\rangle$. Por tanto se trata del operador identidad!

$$\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| = \hat{I} \equiv 1$$

Esta es la relación de cierre que la escribiremos directamente como $\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| = 1$. ¿Cómo podemos interpretar esta expresión? Si consideramos la siguiente expresión:

$$|u_1\rangle \langle u_1|$$

Podemos ver que se trata del proyector que proyecta sobre el vector $|u_1\rangle$. Si añadimos un término de la forma $|u_2\rangle \langle u_2|$:

$$|u_1\rangle \langle u_1| + |u_2\rangle \langle u_2|$$

lo que tenemos ahora es un proyector que proyecta sobre el subespacio de dimensión 2 generado por los dos vectores $\{|u_1\rangle\,,\ |u_2\rangle\}$. Si seguimos añadiendo términos obtendremos un proyector que proyecta sobre un subespacio de dimensión cada vez mayor. Si sumamos sobre todos los vectores de la base:

$$\sum_i |u_i\rangle \langle u_i|$$

lo que tenemos es un proyector que proyecta sobre el espacio completo! Es decir, que en realidad no estamos proyectando. Por eso este operador es igual a la identidad, porque no le hace nada al vector $|\psi\rangle$. Podemos entender también por qué se denomina relación de cierre. Si falta algún vector de la base no obtendremos la identidad y lo mismo ocurre si sobran vectores. Es decir, para obtener la identidad necesitamos que estén todos los vectores de la base pero que tampoco haya vectores de más. Es decir, que el conjunto de proyectores que colocamos esté "cerrado"; que ni sobren ni falten.

Vamos a empezar a utilizar la relación de cierre y veremos lo útil que es para realizar muchos cálculos. Lo primero que podemos hacer es ver que un conjunto ortonormal discreto de vectores $\{|u_i\rangle\}$ es una base sí y sólo sí verifican la relación de cierre. Ya hemos visto que si son una base la verifican, vamos a ver la demostración en la otra dirección. Supongamos que el conjunto ortonormal discreto de vectores $\{|u_i\rangle\}$ verifica la relación de cierre $\sum_i |u_i\rangle \langle u_i| = 1$. Dado un vector $|\psi\rangle$ podemos colocar a su izquierda la relación de cierre ya que es igual a la identidad:

$$|\psi\rangle = \sum_i |u_i\rangle \langle u_i|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle |u_i\rangle$$

En el último paso hemos colocado el número $\langle u_i|\psi\rangle$ a la izquierda del ket $|u_i\rangle$. Pues bien, podemos ver en esta igualdad que hemos conseguido escribir un vector cualquiera $|\psi\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|u_i\rangle$, por tanto son una base. Lo bueno es que además hemos obtenido directamente los coeficientes de la combinación lineal, que son los números $\langle u_i|\psi\rangle$!

Lo coeficientes $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$ son la representación del ket $|\psi\rangle$ en la base $\{|u_i\rangle\}$ y nos permiten realizar cálculos con el vector $|\psi\rangle$.

Supongamos que queremos calcular el producto escalar de otro vector $|\varphi\rangle$ por el vector anterior y de modo que las componentes de $|\varphi\rangle$ en la base $\{|u_i\rangle\}$ sean los coeficientes b_i:

$$|\varphi\rangle = \sum_i b_i |u_i\rangle \qquad \text{donde} \qquad b_i = \langle u_i|\varphi\rangle$$

Podemos hacer el cálculo del producto escalar $\langle\varphi|\psi\rangle$ de la siguiente forma introduciendo en medio la relación de cierre:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_i \langle\varphi|u_i\rangle \langle u_i|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|\varphi\rangle^* \langle u_i|\psi\rangle = \sum_i b_i^* c_i$$

En esta expresión, además, podemos ver cómo vamos a colocar las componentes de un ket y un bra en una determinada base. Las componentes del ket $c_i = \langle u_i|\psi\rangle$ las vamos a colocar en una matriz columna. Las componentes del bra podemos ver que son los números $b_i^* = \langle u_i|\varphi\rangle^* = \langle\varphi|u_i\rangle$ y los colocaremos en una matriz fila. Vamos a verlo con el producto escalar que acabamos de ver:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_i b_i^* c_i = \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \cdots & b_i^* & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\varphi|u_1\rangle & \langle\varphi|u_1\rangle & \cdots & \langle\varphi|u_i\rangle & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_i|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Por tanto, el ket $|\psi\rangle$ y el bra $\langle\varphi|$ están representados en la base $\{|u_i\rangle\}$ por sus componentes, que escribiremos de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\equiv \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_i|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \langle\varphi| &\equiv \begin{pmatrix} b_1^* & b_2^* & \cdots & b_i^* & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\varphi|u_1\rangle & \langle\varphi|u_1\rangle & \cdots & \langle\varphi|u_i\rangle & \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cuando multiplicamos la matriz que representa a un bra por la que representa a un ket obtenemos su producto escalar. También podemos ver que si tenemos la matriz columna que representa a un ket podemos obtener la correspondiente matriz fila que representa al correspondiente bra tomado la traspuesta y el complejo conjugado de las componentes.

Por último, vamos a ver cómo se realiza un cambio de base en notación de Dirac. De nuevo se convierte en una tarea muy sencilla gracias a la relación de cierre. Supongamos que conocemos las componentes de un ket $|\psi\rangle$ en una base $\{|u_i\rangle\}$, es decir, los números $\langle u_i|\psi\rangle$, y que queremos cambiar a otra representación dada por la base $\{|v_i\rangle\}$.

En la nueva base el ket $|\psi\rangle$ estará representado por las nuevas componentes $\langle v_i|\psi\rangle$ ¿Cómo se relacionan con las antiguas? Introducimos en medio la relación de cierre de la base antigua $\sum_j |u_j\rangle \langle u_j| = 1$ que se puede hacer puesto que es la identidad:

$$\langle v_i|\psi\rangle = \sum_j \langle v_i|u_j\rangle \langle u_j|\psi\rangle = \sum_j C_{ij} \langle u_j|\psi\rangle$$

y ya lo tenemos! A la izquierda están las nuevas componentes y a la izquierda las nuevas. La matriz $C_{ij} = \langle v_i|u_j\rangle$ es la matriz del cambio de base. La ecuación anterior en forma matricial es, por tanto:

$$\begin{pmatrix} \langle v_1|\psi\rangle \\ \langle v_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle v_i|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} & \cdots \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ C_{i1} & C_{i2} & & C_{ij} & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle u_1|\psi\rangle \\ \langle u_2|\psi\rangle \\ \vdots \\ \langle u_j|\psi\rangle \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Igual de fácil se pueden obtener las componentes de un bra en la nueva base. Supongamos un bra $\langle\psi|$, de modo que sus componentes en la base $\{|u_i\rangle\}$ son los números $\langle\psi|u_i\rangle$. Podemos calcular las componentes en la nueva base, es decir los números $\langle\psi|v_i\rangle$, introduciendo la relación de cierre de la base $\{|u_i\rangle\}$:

$$\langle\psi|v_i\rangle = \sum_j \langle\psi|u_j\rangle \langle u_j|v_i\rangle = \sum_j \langle\psi|u_j\rangle \langle v_i|u_j\rangle^* = \sum_j \langle\psi|u_j\rangle C_{ij}^*$$

o en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \langle\psi|v_1\rangle & \langle\psi|v_2\rangle & \cdots & \langle\psi|v_i\rangle & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle\psi|u_1\rangle & \langle\psi|u_2\rangle & \cdots & \langle\psi|u_j\rangle & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11}^* & C_{21}^* & \cdots & C_{j1}^* & \cdots \\ C_{12}^* & C_{22}^* & \cdots & C_{j2}^* & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ C_{1i}^* & C_{2i}^* & & C_{ji}^* & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Podemos ver que la matriz que aparece en el caso de un bra actua por la derecha, como corresponde a un bra!

Bases ortonormales continuas.

Vamos a extender ahora el concepto de base al caso de un conjunto de vectores etiquetados mediante un índice real continuo tal como hicimos con las funciones. Diremos que un conjunto continuo de kets $\{|v_\alpha\rangle\}$ es ortonormal en el sentido de Dirac si verifican la condición:

$$\langle v_\alpha|v_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$$

Diremos además que constituyen una base si cualquier vector $|\psi\rangle$ se puede escribir de forma única como una combinación lineal de los kets $|v_\alpha\rangle$ de la forma:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha\ c(\alpha)\,|v_\alpha\rangle$$

Obtenemos ahora la función $c\,(\alpha)$ cambiando la variable de integración α por α' y multiplicando en ambos miembros por el bra $\langle v_\alpha|$:

$$\langle v_\alpha|\psi\rangle = \langle v_\alpha| \int d\alpha'\ c(\alpha')\,|v_{\alpha'}\rangle = \int d\alpha'\ c(\alpha')\,\langle v_\alpha|v_{\alpha'}\rangle = \int d\alpha'\ c(\alpha')\delta(\alpha - \alpha') = c\,(\alpha)$$

Por tanto $c\,(\alpha) = \langle v_\alpha|\psi\rangle$.

Vamos a obtener ahora la relación de cierre. En la expresión de $|\psi\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|v_\alpha\rangle$ sustituimos el valor de la función $c\,(\alpha)$ por la expresión que acabamos de escribir:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha\; c(\alpha)\,|v_\alpha\rangle = \int d\alpha\; \underbrace{\langle v_\alpha|\psi\rangle}\,|v_\alpha\rangle = \int d\alpha\;\; |v_\alpha\rangle\,\langle v_\alpha|\psi\rangle = \left(\int d\alpha\;\; |v_\alpha\rangle\,\langle v_\alpha|\right)|\psi\rangle = |\psi\rangle$$

La expresión que hemos separado con un paréntesis tiene que ser igual al operador identidad:

$$\int d\alpha\;\; |v_\alpha\rangle\,\langle v_\alpha| = \hat{I} \equiv 1$$

Esta es la relación de cierre de la base $\{|v_\alpha\rangle\}$ y tiene la misma utilidad que para el caso de bases ortonormales discretas. Al igual que ocurría en ese caso, el conjunto ortonormal en el sentido de Dirac $\{|v_\alpha\rangle\}$ es una base sí y sólo sí verifican la relación de cierre. Podemos utilizar la relación de cierre para obtener la representación de un vector $|\psi\rangle$ en la base $\{|v_\alpha\rangle\}$. A la izquierda del vector $|\psi\rangle$ introducimos la relación de cierre:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha\;\; |v_\alpha\rangle\,\underbrace{\langle v_\alpha|\psi\rangle} = \int d\alpha\;\; \langle v_\alpha|\psi\rangle\,|v_\alpha\rangle$$

Ya tenemos el vector $|\psi\rangle$ como combinación lineal de los vectores $|v_\alpha\rangle$ y la función que multiplica al vector es $\langle v_\alpha|\psi\rangle = c\,(\alpha)$.

La función $c\,(\alpha)$ es la representación del vector $|\psi\rangle$ en la base $\{|v_\alpha\rangle\}$ y permite hacer cualquier cálculo relativo al vector. Vamos a ver de nuevo el producto escalar de dos vectores utilizando la base ortonormal continua. Vamos a suponer que queremos calcular el producto escalar $\langle\varphi|\psi\rangle$ utilizando la representación de los vectores $|\psi\rangle$ y $|\varphi\rangle$ en la base $\{|v_\alpha\rangle\}$. El vector $|\psi\rangle$ estará representado por la función $c\,(\alpha)$ mientras que el vector $|\varphi\rangle$ estará representado por otra funcion $b\,(\alpha)$:

$$|\varphi\rangle = \int d\alpha\; b(\alpha)\,|v_\alpha\rangle \qquad\qquad \text{donde } b\,(\alpha) = \langle v_\alpha|\varphi\rangle$$

Pues bien, podemos calcular el producto escalar $\langle\varphi|\psi\rangle$ introduciendo en medio la relación de cierre de la base:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int d\alpha\;\; \langle\varphi|v_\alpha\rangle\,\langle v_\alpha|\psi\rangle = \int d\alpha\;\; \langle v_\alpha|\varphi\rangle^*\,\langle v_\alpha|\psi\rangle = \int d\alpha\; b^*\,(\alpha)\,c\,(\alpha)$$

El cambio de representación se realiza de forma similar al caso de las bases ortonormales discretas. Supongamos que conocemos la representación de un ket $|\psi\rangle$ en una base $\{|v_\alpha\rangle\}$, es decir, la funcion $\langle v_\alpha|\psi\rangle$, y queremos obtener la representación en una nueva base $\{|w_\alpha\rangle\}$, es decir, la función $\langle w_\alpha|\psi\rangle$. Pues bien, lo único que tenemos que hacer es introducir en medio de $\langle w_\alpha|\psi\rangle$ la relación de cierre de la base antigua:

$$\langle w_\alpha|\psi\rangle = \int d\beta\;\; \langle w_\alpha|v_\beta\rangle\,\langle v_\beta|\psi\rangle = \int d\beta\; C_{\alpha\beta}\,\langle v_\beta|\psi\rangle$$

Aunque es más abstracto en realidad es igual de sencillo.

Vamos a dar un paso importante introduciendo de nuevo las bases de la representación de momentos y coordenadas. Vamos a comenzar en este caso con la representación coordenadas que aunque es más sencilla quizás cueste más entenderla porque en realidad lo que se dice es evidente aunque no lo parece.

Los vectores ket del espacio de estados $\mathfrak{E}$ los construimos a partir de las funciones $\psi(x)$ estableciendo una relación biunívoca. Pues bien, a cada función de la base de la representación coordenadas $\{v_{x'}(x) = \delta(x - x')\}$ le vamos a hacer corresponder un ket $|x'\rangle$ del espacio de estados:

$$v_{x'}(x) = \delta(x - x') \Longleftrightarrow |x'\rangle \in \mathfrak{E}$$

Podemos ver que $v_{x'}(x) = v_x(x') = \delta(x - x')$. Estos vectores serán ortonormales en sentido de Dirac, de modo que:

$$\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$$

y además constituirán una base $\{|x\rangle\}$ (hemos quitado la prima porque no hace falta) denominada base de la representación coordenadas. Estos vectores satisfacen, por tanto, la relación de cierre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \ |x\rangle \langle x| = 1$$

Cualquier vector $|\psi\rangle$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $|x\rangle$. Introducimos a la izquierda del vector la relación de cierre:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \ |x\rangle \underbrace{\langle x|\psi\rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \ \langle x|\psi\rangle |x\rangle$$

La función $\langle x|\psi\rangle$ se dice que es la representacion de $|\psi\rangle$ en la base $\{|x\rangle\}$. Podemos ver cuánto vale esta función calculando el producto escalar $\langle x|\psi\rangle$ utilizando la integral original de la definición de producto escalar, lo único es que como ya hemos utilizado la variable x integraremos en otra variable x':

$$\langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \ v_x^*(x')\,\psi(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \ \delta(x - x')\,\psi(x') = \psi(x)$$

Hemos llegado a que $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$! Es decir, que utilizar una función de onda para representar un estado ya es utilizar una base concreta del espacio de estados: la base de la representación coordenadas. La forma de escribir una función onda en notación de Dirac será:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle \qquad \text{y} \qquad \psi^*(x) = \langle x|\psi\rangle^* = \langle\psi|x\rangle$$

Podemos utilizar esta base para calcular un producto escalar $\langle\varphi|\psi\rangle$ introduciendo en medio la relación de cierre $\int_{-\infty}^{\infty} dx \ \ |x\rangle \langle x| = 1$:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \ \langle\varphi|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \varphi^*(x)\,\psi(x)$$

Vamos a definir ahora la base de la representación de momentos en el espacio de estados $\mathfrak{E}$ de forma similar a la representación coordenadas. A cada función $\left\{v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px}\right\}$ le vamos a hacer corresponder de forma biunívoca un ket $|p\rangle$ del espacio de estados:

$$v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px} \Longleftrightarrow |p\rangle \in \mathfrak{E}$$

Al igual que ocurre en la representación coordenadas estos vectores serán ortonormales en el sentido de Dirac:

$$\langle p|p'\rangle = \delta\left(p - p'\right)$$

y por el hecho de ser una base, $\{|p\rangle\}$, satisfacen la relacion de cierre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dp \;\; |p\rangle \langle p| = 1$$

Cualquier vector $|\psi\rangle$ se puede escribir como combinación lineal de los vectores $|p\rangle$, para lo cual introducimos a la izquierda del ket $|\psi\rangle$ la relación de cierre:

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp \;\; |p\rangle \underbrace{\langle p|\psi\rangle} = \int_{-\infty}^{\infty} dp \;\; \langle p|\psi\rangle \, |p\rangle$$

El producto escalar $\langle p|\psi\rangle$ será la representación del vector $|\psi\rangle$ en la base $\{|p\rangle\}$. Podemos calcular este producto escalar a partir de la definición original:

$$\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; v_p^*(x)\psi\left(x\right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi\left(x\right) = \bar{\psi}\left(p\right)$$

Es decir, que la función $\bar{\psi}\left(p\right)$ es el vector $|\psi\rangle$ en la representación de momentos y es por lo que la denominamos función de onda en la representación de momentos.

Podíamos haber llegado al mismo resultado de forma más abstracta pero más elegante mediante un cambio de base. Si de la base $\{|x\rangle\}$, en la que el ket $|\psi\rangle$ está representado por la funcion en onda $\psi\left(x\right) = \langle x|\psi\rangle$ queremos pasar a la base $\{|p\rangle\}$, es decir obtener la función $\langle p|\psi\rangle$, lo único que tenemos que hacer es introducir en medio la relación de cierre de la base $\{|x\rangle\}$:

$$\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle$$

¿Qué es cada cosa? Está claro que $\langle x|\psi\rangle = \psi\left(x\right)$, pero ¿cuánto vale $\langle p|x\rangle$? Si estuviera al contrario, es decir $\langle x|p\rangle$ está claro que es una función de x (aparece a la izquierda el bra $\langle x|$ al igual que en la función de onda $\psi\left(x\right)$). De hecho $\langle x|p\rangle$ no es otra cosa que $v_p(x)$. Por tanto:

$$\langle x|p\rangle = v_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{i}{\hbar}px} \quad \text{y} \quad \langle p|x\rangle = \langle x|p\rangle^* = v_p^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}$$

Por tanto:

$$\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \;\; \langle p|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \; \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar}px}\psi\left(x\right) = \bar{\psi}\left(p\right)$$

Llegamos a la misma conclusión.

Lo importante es darnos cuenta de que la notación de Dirac pone de manifiesto por qué las dos funciones $\psi\left(x\right)$ y $\bar{\psi}\left(p\right)$ contienen la misma información. Las dos funciones se refieren al mismo estado $|\psi\rangle$ y corresponden a dos representaciones de dicho estado: son dos formas distintas de representar el mismo estado. Si al estado $|\psi\rangle$ le colocamos a la izquierda el bra $\langle x|$ tendremos el estado en la representacion coordenadas y si le colocamos el bra $\langle p|$ tendremos el estado en la representación de momentos.

$$|\psi\rangle \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \langle x|\psi\rangle = \psi\left(x\right) & \text{Representación coordenadas} \\ \langle p|\psi\rangle = \bar{\psi}\left(p\right) & \text{Representación de momentos} \end{array} \right.$$