PLANCKS Austria 2024

Graz, 6th - 7th April

Teamname

Titel	**Punkte**	
Bob der Brückenmeister	13	
Kernfusion: Bewegung geladener Teilchen im Tokamak	13	
Gezeiten	13	
A glimpse on quantum cryptography	13	
Stabilität einer Flammenfront	11	
Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, big deal?	6	
Ein Atom im Käfig	11	
Quantum Bomb Tester	12	
Coupled Oscillator	17	
Gesamt	109	

Mit Beiträgen von Professor Arrigoni und Aichhorn.
Viel Erfolg wünschen Felix, Christian und Lukas!

1 Bob der Brückenmeister

13 Punkte

Ein Seil mit homogener Dichteverteilung, Masse m und Länge L sei von $-x_0/2$ bis $x_0/2$ befestigt. Es berüht den Boden nicht und nur die Gravitationskraft $\vec{F}_\text{g}$ wirkt auf das Seil. Unser Ziel ist es, einen Ausdruck für $y(x)$ zu finden um die Form des Seils als Funktion von x und den Anfangsbedingungen zu erhalten.

(a) (1 Punkt) Schreibe die infinitesimale Bogenlänge ds als Funktion von dx und $y'(x)$. Hierbei ist $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$.

(b) (2 Punkte) In Ruhelage heben sich die Kräfte, die auf ein infinitesimales Massenelement dm wirken, in x- und y-Richtung jeweils gegenseitig auf. Stelle damit die Formeln für die Seilkraft in x-Richtung und für die Ableitungen der Seilkraft in y-Richtung auf. Nutze dafür die Formel aus (a).

(c) (2 Punkte) In welcher Beziehung steht die Seilkraft zum Seil? Welche Relation lässt sich daraus ableiten? Nutze diese um einen weiteren Ausdruck für die Ableitung der Seilkraft in y-Richtung zu erhalten und setzte diesen mit dem aus (b) gleich um die Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten.

(d) (3 Punkte) Löse die Differentialgleichung zweiter Ordnung.

(e) (2 Punkte) Berechne $L(x_0)$

(f) (3 Punkte) Berechne die Kraft in x-Richtung $F_x(L, x_0)$ für den Fall, dass das Seil fast vollständig gespannt ist und für $y(-x_0/2) = 0$ und $y(x_0/2) = 0$. Nimm dazu an, dass die Seilkraft in x-Richtung größer ist als die Gewichtskraft.

Figure 1.1: Hängebrücke im Hunsrückgebirge

2 Kernfusion: Bewegung geladener Teilchen im Tokamak

13 Punkte

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q befindet sich in einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B}$. Zusätzlich wirkt eine zeitlich konstante Kraft $\vec{F}$ auf das Teilchen. Die Geschwindigkeit des Teilchens kann in parallel und normal Komponenten relativ zum Magnetfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ aufgespalten werden.

Die Bewegungsgleichungen des Teilchens sind durch

$$m\frac{\partial v}{\partial t} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}, \tag{2.1}$$

bestimmt.

(a) (3 Punkte) Nun wollen wir die vollständige Lösung des Problems bestimmen. Hierfür wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $\mathbf{F} = F_\perp \hat{\mathbf{e}}_x$ und $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_z$. Nun können wir letzteres in Gleichung 2.1 einsetzen. Löse dieses System an linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Als Ansatz für die homogene Lösung eignet sich $v_x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$, $v_y(t) = C\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)$ und $v_z(t) = \text{const.}$, vergiss die partikuläre Lösung jedoch nicht!

(b) (2 Punkte) Löse die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\mathbf{v}(0) = (0, v_g - F_\perp/(qB), v_\parallel)$ und $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$. Mache außerdem eine qualitative Skizze der Kreisbahnen der Elektronen und Ionen. Was ist deren (Gyrations)radius ρ?

(c) (1 Punkte) Interpretiere die homogene und partikuläre Lösung.

Wir nennen von nun an den xy-Anteil der homogenen Lösung $\mathbf{v}_\mathrm{g}$ und die partikuläre Lösung $\mathbf{v}_\mathrm{D}$, oft Driftgeschwindigkeit genannt. Unsere Lösung für $\mathbf{v}_z$ wird im allgemeinen Fall $\mathbf{v}_\parallel$ genannt.

Betrachten wir nun das konkrete Beispiel eines Tokamak Plasmareaktor. Das wichtigste Ziel eines Plasmareaktors ist das Plasma (geladene Teilchen) davor zu Schützen seine innere Oberfläche zu berühren. Wir nutzen zunächst das Koordinatensystem in Abbildung 2.1.

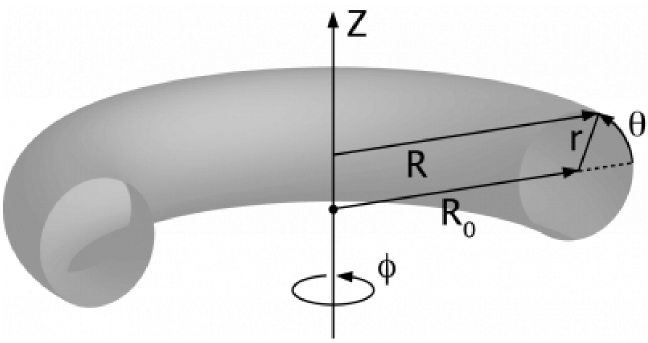


Figure 2.1: Skizze von unserem Koordinatensystem.

In den Punkten (a-c) haben wir gelernt, dass jede Kraft $\mathbf{F}_\perp$ zu einem Drift $\mathbf{v}_D$ führt der normal auf $\mathbf{B}$ und $\mathbf{F}_\perp$ steht. Bis auf den Drift, bewegen sich die Teilchen, für kleinen Gyrationsradius ρ, im Mittel entlang der Feldlinien. Für unseren Tokamak wollen wir wissen, wie sich Teilchen verhalten, die sich entlang von $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_\phi$ mit einem Krümmungsradius von $\mathbf{R}$ bewegen.

(d) (1 Punkte) Zu welchem Drift führt die dadurch entstehende Fliehkraft $\mathbf{F}_{\text{zf}}$? Was passiert dadurch mit den positiv und negativ geladenen Teilchen?

(e) (2 Punkte) Wir führen nun eine Magnetfeldkomponente in z-Richtung ein. Daher ist $\mathbf{B} = B_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_z\hat{\mathbf{e}}_z$. Bestimme das passende Verhältnis von B_z zu B_ϕ für ein Elektron mit einer Geschwindigkeit von $v_\parallel$, um $v_z = 0$ zu erhalten. Damit ist sichergestellt, dass die Teilchen im Reakter bleiben. Möglicherweise hilfreich: $B_z \ll B_\phi$ und $B_\phi \approx B$.

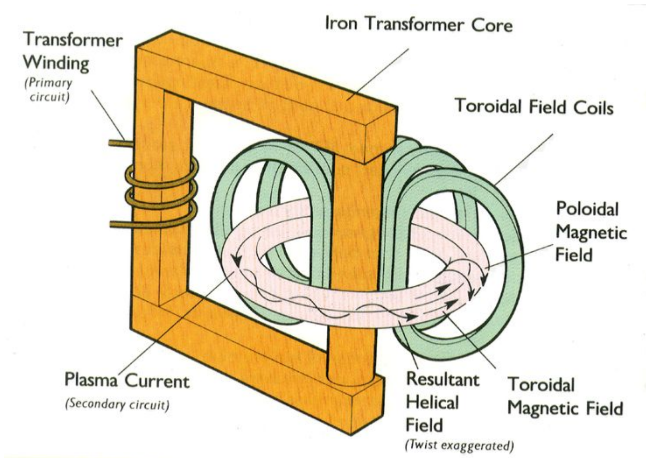


Figure 2.2: Schmatischer Aufbau eines Tokamak.

(f) (4 Punkte) Dieser *quick fix* funktioniert leider nur für Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Es gibt jedoch auch eine noch bessere Lösung. Hierfür nehmen wir an, dass nun $\mathbf{B} = B_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Die Magnetfeldlinien winden sich daher um den Torus, siehe Abbildung 2.2. Man kann zeigen dass die Bewegungsgleichungen durch

$$\begin{aligned} r\frac{d\theta}{dt} &\approx \frac{B_\theta}{B}v_\parallel + v_{\text{D}}\cos(\theta) \\ \frac{dr}{dt} &\approx v_{\text{D}}\sin(\theta) \end{aligned} \tag{2.2}$$

gegeben sind. Löse für $r(\theta)$. Verwende dafür $\frac{Bv_D}{B_\theta v_\parallel} \ll 1$ um zu zeigen, dass $r(\theta)$ zwischen zwei Umkehrpunkten oszilliert und die Teilchen daher im Tokamak bleiben!

3 Gezeiten

13 Punkte

Wenn die Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Mond-Erde kreist, kompensieren sich die Gravitationskraft des Mondes und die Fliehkraft nur im Massenmittelpunkt der Erde. An allen Punkten der Erdoberfläche wirken drei Kräfte: die Gravitationskraft der Erde, die Gravitationskraft des Mondes und die Fliehkraft. Letztere stammt von der Rotation der Erde um eine Achse durch ihren Mittelpunkt und von der Revolution des Erdmittelpunkt um den gemeinsamen Schwerpunkt (Revolution ohne Rotation). Die Differenz der Gravitationskraft des Mondes und der Fliehkraft durch die Revolution ohne Rotation bildet die Gezeitenkraft.

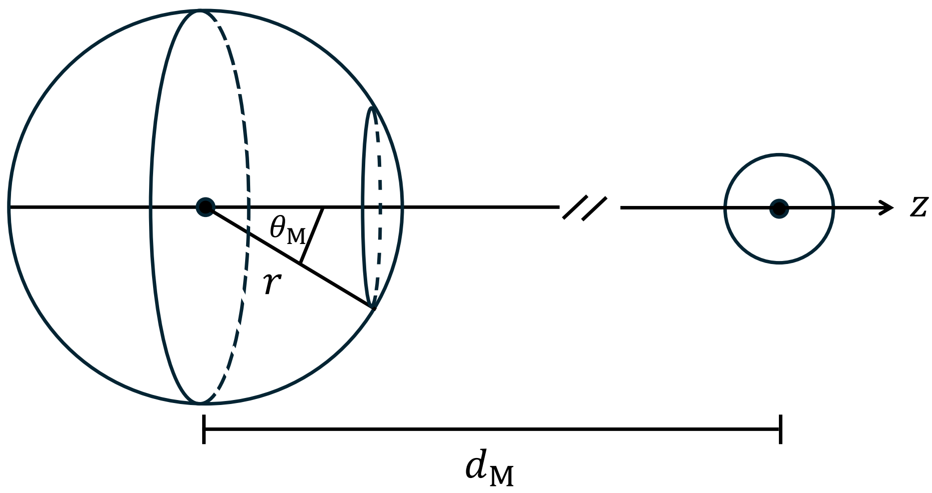


Figure 3.1: Skizze unseres Koordinatensystems.

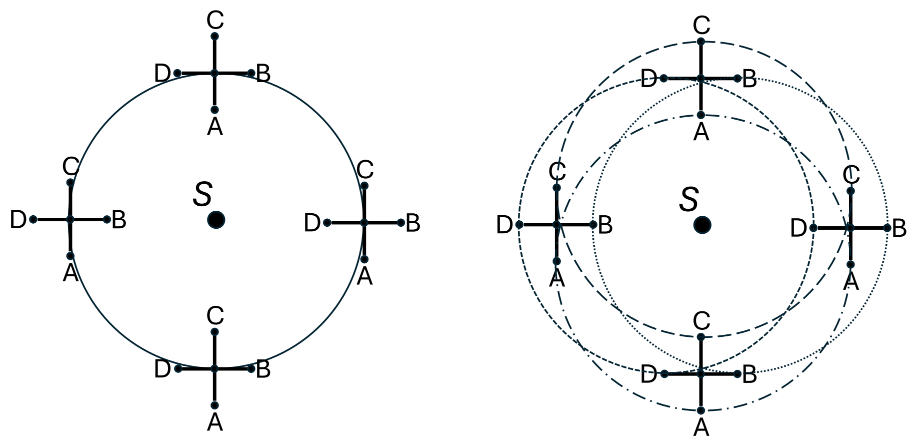


Figure 3.2: Schematische Skizze von einer Revolution ohne Rotation. Links: Ein starres Kreuz kreist um S, der Verlauf des Massenmittelpunkts ist skizziert. Rechts: Die Verläufe Eckpunkte des Kreuzes sind skizziert. Sie durchlaufen Kreise mit dem gleichen Radius.

In diesem Beispiel nehmen wir alle Körper als kugelsymmetrisch an und ihre Bahnen als Kreisbahnen. Wir ignorieren weiters die Änderung des Gravitationspotentials der Erde, welche durch die Verschiebung von Massen durch die Gezeitenbeschleunigung auftreten. Den Radius der Erde schreiben wir als R_E, die Distanz zwischen den Massenmittelpunkten von Mond und Erde als d_M und die von Sonne und Erde d_S. Die Massen nennen wir sinngemäß. Wir haben daher $R_\mathrm{E} = 6371$ km, $d_\mathrm{M} = 4 \cdot 10^5$ km, $d_\mathrm{S} = 1.5 \cdot 10^8$ km, $M_\mathrm{E} = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $M_\mathrm{M} = 7 \cdot 10^{22}$ kg, $M_\mathrm{S} = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$.

(a) (1 Punkt) Auf den mondnächsten Punkt der Erdoberfläche wirkt eine stärkere Gravitationskraft als auf den Erdmittelpunkt. Bestimme die Differenz dieser Kräfte und zeige, dass man sie nähungsweise als

$$F_\mathrm{gra}(d_\mathrm{M} - R_\mathrm{E}) - F_\mathrm{gra}(d_\mathrm{M}) \approx \frac{2GM_\mathrm{M}mR_\mathrm{E}}{d_\mathrm{M}^3} \tag{3.1}$$

schreiben kann.

Wir wollen nun das Gezeitenpotential des Mondes, $\Phi_\mathrm{M}(r, \theta)$, als Funktion von Abstand zum Massenmittelpunkt der Erde und einem Winkel herleiten. Wir gehen dazu in ein Koordinatensystem über, dessen Ursprung sich im Massenmittelpunkt der Erde befindet, allerdings nicht mit der Erde mitrotiert. Desweiteren nutzen wir Kugelkoordinaten. Wir führen zusätzlich eine z-Achse, $(\theta_\mathrm{M} = 0)$, ein, die immer zum Mond zeigt, siehe Abbildung 3.1. Dadurch sind alle Punkte, die die gleichen (r, θ_M) Koordinaten haben gleich weit vom Mond entfernt.

(b) (2 Punkte) Nutze den Fakt, dass sich die Fliehkraft durch die Revolution ohne Rotation (RoR), siehe Abbildung 3.2, und die Gravitionskraft durch den Mond im Massenmittelpunkt aufheben. Daher ist die Fliehkraft der RoR an jedem Punkt auf der Erde im Betrag gleich der Gravitationskraft des Mondes im Massenmittelpunkt der Erde, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Zeige, dass $-\nabla\Phi_\mathrm{Zf}$ die Zentrifugalkraft der RoR ist. Hierbei ist

$$\Phi_\mathrm{Zf} = \frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}^2} r \cos{(\theta_\mathrm{M})}, \tag{3.2}$$

das zugehörige Potential der RoR.

(c) (5 Punkte) Das Gezeitenpotential des Mondes $\Phi_\mathrm{M} = \Phi_\mathrm{gra} + \Phi_\mathrm{Zf}$, wobei Φ_gra das Potentials durch die Gravitation den Mondes ist. Expandiere dieses um zu zeigen, dass näherungsweise

$$\Phi_\mathrm{M}(\theta_\mathrm{M}, r) \approx -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}} \left[1 + \frac{1}{4}\frac{r^2}{d_\mathrm{M}^2}(3\cos(2\theta_\mathrm{M}) + 1)\right] \tag{3.3}$$

gilt. Nutze dafür $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ und vernachlässige Terme die mit $(\frac{r}{d_\mathrm{M}})^4$ oder höher Ordnung skalieren.

Der Wasserstand des Meeres wird durch das Gezeitenpotential, $\Phi_\mathrm{G}(\theta_M, \theta_S, r) = \Phi_\mathrm{M}(\theta_M, r) + \Phi_\mathrm{S}(\theta_S, r)$ etwas verändert, wobei $\Phi_\mathrm{S}(\theta_S, r)$ das Gezeitenpotential der Sonne ist. Die Änderung der Höhe, also die Abweichung vom durchschnittlichen Meeresspiegel, nennen wir $h(\theta_M, \theta_S, r)$.

(d) (1 Punkt) In welchem Verhältnis steht $h(\theta_\mathrm{M}, \theta_\mathrm{S}, r)$ zu Φ_G? Hinweis: Die Meeresoberfläche ist eine Equipotentialfläche.

(e) (2 Punkte) Skizziere die Konstellationen für die die Flut maximal bzw minmal ist. Was ist das Verhältnis dieser beiden Fluthöhen?

(f) (2 Punkte) Wir nutzen das Mittelmeer als Gezeitenkraftwerk. Nimm an, dass du die potentielle Energie des Höhenunterschiedes in beide Richtungen mit einem Wirkungsgrad von 0.5 nutzen kannst. Ignoriere den Einfluss der Sonne. Die Fläche des Mittelmeeres umfasst 2.5 Millionen km^2. Wie viel GW Leistung hat unser Mittelmeerkraftwerk?

4 A glimpse on quantum cryptography

13 Punkte *Markus Aichhorn*, TU Graz

In this example we want to show how quantum mechanics can be used to minimize the risk that an unwanted intruder/spy intercepts messages. In the following we assume that the sender Alice (A) wants to send a sequence of bits to a receiver Bob (B).

We will encode the bits through spins. The spin operator is $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, with $\hat{\sigma}_i$ the three Pauli matrices. We use $|\sigma_z = +1\rangle$ and $|\sigma_z = -1\rangle$ for the eigenstates of $\hat{S}_z$ with eigenvalues $+\frac{\hbar}{2}$ and $-\frac{\hbar}{2}$.

Lets now consider measurments of spins along an axis u in the (x, z)-plane, defined by

$$\mathbf{e}_u = \cos\theta\,\mathbf{e}_z + \sin\theta\,\mathbf{e}_x\,, \tag{4.1}$$

with the spin operator projected to this axis

$$\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{e}_u = \frac{\hbar}{2}(\cos\theta\,\hat{\sigma}_z + \sin\theta\,\hat{\sigma}_x)\,. \tag{4.2}$$

1) (2 points) Show that this operator has eigenstates

$$|\sigma_u = +1\rangle = \cos(\theta/2)|\sigma_z = +1\rangle + \sin(\theta/2)|\sigma_z = -1\rangle \tag{4.3}$$
$$|\sigma_u = -1\rangle = -\sin(\theta/2)|\sigma_z = +1\rangle + \cos(\theta/2)|\sigma_z = -1\rangle \tag{4.4}$$

with eigenvalues $+\hbar/2$ and $-\hbar/2$, resp. Assuming a state prepared in $|\sigma_z = +1\rangle$, calculate the probabilities $p_u^{\pm}$ of finding $\pm\frac{\hbar}{2}$ when measuring the projection of the spin on the u axis.

After this measurement, we again measure the z component of the spin.

2) (1 points) Show that the probability to find again the state $|\sigma_z = +1\rangle$ is given by $P_{++}(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)$. The identity $\cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2) = (1 + \cos^2\theta)/2$ might be useful.

3) (1 points) Starting from an initial state $|\sigma_z = -1\rangle$, what is the probability $P_{--}(\theta)$ to find again $|\sigma_z = -1\rangle$ in the second measurement?

We now prepare a pair (a, b) of spins in a source. The spin state of the two particles is given by

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_z^a = +1\rangle \otimes |\sigma_z^b = +1\rangle + |\sigma_z^a = -1\rangle \otimes |\sigma_z^b = -1\rangle\right) \tag{4.5}$$

4) (1 points) Use the identities $|\sigma_x = \pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_z = +1\rangle \pm |\sigma_z = -1\rangle)$ and rewrite the state $|\chi\rangle$ in terms of $|\sigma_x = \pm 1\rangle$.

We now separate the two spins, and send the part a to Alice, and part b to Bob. Although the spins are separated in space, they still are entangled in their spin sector.

5) (1 points) Alice now measures only her spin, i.e. part a. She can do it along the z axis ($\theta_a = 0$) or along the x axis ($\theta_a = \pi/2$). What are the possible results of these measurements, their probabilities, and the states after the measurements?

6) (1 points) After Alice's measurement, Bob measures the spin of particle b along an axis u_b of angle θ_b. Give the possible reaults of Bob's measurements and their probabilities in terms of Alics's results in the four following configurations: (a) $\theta_a = 0, \theta_b = 0$, (b) $\theta_a = 0, \theta_b = \pi/2$, (c) $\theta_a = \pi/2, \theta_b = 0$, (d) $\theta_a = \pi/2, \theta_b = \pi/2$. In which cases do the measurments of Alice and Bob give with certainity the same results?

7) (1 point) Consider now the situation $\theta_a = 0$. Suppose that a *spy* is sitting between the source and Bob, and has access to part b of the system before it reaches Bob. The spy measures the part b along an axis u_s of angle θ_s. After that, Bob also measures part b, but along $\theta_b = 0$. What is the probability $P(\theta_s)$ as function of θ_s that Alice and Bob measure the same result?

8) (3 point) What is the expectation value that Alice and Bob measure the same result, if the spy chooses $\theta_s = 0$ or $\theta_s = \pi/2$ at random?

From what we have just learned, we can set up the following protocol to communicate securely:

i) Alice controls the source and prepares and ordered sequence of N pairs of spins, she keeps the a parts and sends the b parts towards Bob.

ii) For each spin, Alice and Bob measure either the z or the x component. They choose the direction independently of each other, without correlation, with probability 1/2. They both register the results.

iii) Bob selects a subset $N' \approx N/2$. He communicates openly to Alice (by radio etc.) the axis and the results of the measurements for each event in this subset.

iv) Alice compares for this subset her axes and her results with those communicated by Bob. By doing so, she can tell whether there is a spy or not. If a spy is spotted, the whole communication is dismissed.

v) If no spy is spotted, the remaining spins can be used to transmit information (the details how do not matter here).

Final questions:

9) (1 points) If she is allowed to compare her results with the ones from Bob, how can Alice be sure that a spy is present?

10) (1 points) What is the probability that an operating spy will escape being detected? Calculate this probability for $N' = 200$.

5 Stabilität einer Flammenfront

11 Punkte *Felix Halbwedl*

Ein einseitig geschlossenes Rohr mit einem Durchmesser der Größenordnung l ist mit einem brennbaren Gasgemisch 1 der Dichte ρ_1 gefüllt. Nun wird das Rohrende bis zur Entzündung des Gases erhitzt, es bildet sich eine Flammenfront von konstanter Dicke δ aus, die sich vom Rohrende weg mit gleichmäßiger Geschwindigkeit ausbreitet und als Verbrennungsprodukt ein Gasgemisch 2 der Dichte ρ_2 hinterlässt. Das restliche Gas möge sich allenfalls parallel zum Rohr bewegen. (Siehe Abbildung 5.1)

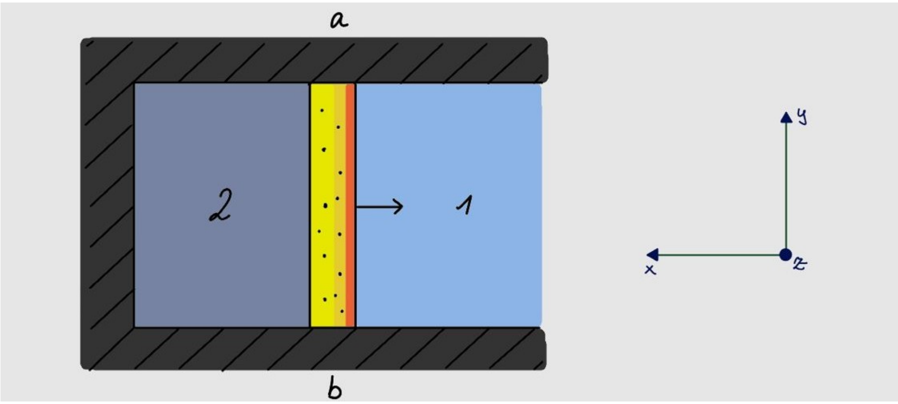


Figure 5.1: Langsame Verbrennung in einem Rohr. Gasgemisch 1 ist unverbrannt, Gasgemisch 2 ist bereits verbrannt. Die Verbrennungsfront erstreckt sich von a nach b, und läuft vom Rohrende weg in negative x-Richtung.

1. (1 Punkt) Zur Vereinfachung des Problems werden folgende zusätzliche Annahmen getroffen:

   Annahme 1 Die Dicke δ der Flammenfront ist klein gegenüber den Rohrabmessungen l und kann somit vernachlässigt werden.

   Annahme 2 Die Flammenfront breitet sich weit unter der Schallgeschwindigkeit c aus.

   Annahme 1 erlaubt es, den chemischen Verbrennungsvorgang gesondert von der physikalischen Gassströmung zu behandeln. *Annahme 2* rechtfertigt die Verwendung eines idealen inkompressiblen reibungsfreien Gasmodells. Begründe die Annahmen. Folgende Größen könnten dabei hilfreich sein.

$$\left.\begin{aligned} v_1 &\ldots \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Verbrennung} \\ c &\ldots \text{Schallgeschwindigkeit} \\ \tau &\ldots \text{Charakteristische Reaktionszeit} \\ \tau_{fr} &\ldots \text{mittlere freie Flugzeit eines Moleküls} \\ \chi &\ldots \text{Temperaturleitfähigkeit} \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

Untersuche die Stabilität der gegebenen Flammenfront gegenüber kleinen Störungen $\zeta \sim De^{iky-i\omega t}$ normal zur Flammenfront. Wähle hierfür ein Koordinatensystem, in dem die ungestörte Flammenfront ruht und bündig zur yz-Ebene liegt. Die Bewegungsgleichungen für die Abweichungen

$\mathbf{v}'$, p' von $\mathbf{v} \sim \hat{e}_x$ und p lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \qquad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho}\nabla p', \tag{5.2}$$

wobei für ρ, p, p', $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ die Dichten, Drücke und Geschwindigkeiten der Gasgemische 1 und 2 einzusetzen sind. Weiters ist an der Flammenfront die Tangentialkomponente stetig.

$$v'_{1y} + v_1\frac{\partial \zeta}{\partial y} = v'_{2y} + v_2\frac{\partial \zeta}{\partial y} \tag{5.3}$$

Für die Normalkomponente der Geschwindigkeit gilt

$$v'_{1y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_{2y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \tag{5.4}$$

Wichtig: Die Abweichungen $\mathbf{v}'$, p' von den Gleichgewichtsgrößen $\mathbf{v}$, p können als z-unabhängig angesehen werden, $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}'(x, y, t)$, $p' \equiv p'(x, y, t)$.

2. (1 Punkt) Welche Gleichung für den Druck ergibt sich aus den Gleichungen (5.2)?

3. (1 Punkt) Die Störung ζ ist periodisch in y und t. Welche Randbedingungen der Gleichungen (5.2) sind kompatibel dazu? Wähle möglichst einfache Randbedingungen!

4. (2 Punkte) Bestimme die Druckabweichungen $p'_1(x, y, t)$, $p'_2(x, y, t)$ in den Gasgemischen 1 und 2 aus der in Unterpunkt 2 bestimmten Gleichung unter Berücksichtigung der angenommenen Randbedingungen. (Hinweis: starte mit einem geeigneten Exponentialansatz)

5. (1 Punkt) Bestimme eine homogene Lösung $\mathbf{v}'(x, y, t)$ der Gleichungen (5.2) für das Gasgemisch 2. Ist sie für den gesamten Bereich physikalisch sinnvoll? Es kann $v'_z = 0$ angenommen werden.

6. (1 Punkt) Aus den Drücken bestimme dann Geschwindigkeitsabweichungen $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ für beide Gasgemische 1, 2, abermals mit verschwindender z-Komponente. Beachte die homogene Lösung aus dem vorherigen Unterpunkt.

7. (2 Punkt) Die erhaltenen Lösungen für $\mathbf{v}'_1$, p'_1, $\mathbf{v}'_2$, p'_2 ließen sich *prinzipiell* in die Gleichungen (5.4), (5.3) einsetzen, um ein Gleichungssystem für die Koeffizienten zu erhalten. Eine längere Rechnung würde dann (unter Verwendung von $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$) auf folgende Bedingung für deren Lösbarkeit führen

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0, \qquad \Omega \equiv i\omega \tag{5.5}$$

   Welche Lösungen Ω sind für obiges Gleichungssystem möglich?

8. (2 Punkte) Was lässt sich über die Stabilität der Flammenfront aus $\Omega \equiv i\omega$ aussagen? Findet sich diese Modelllösung auch in der realen Welt? Warum (nicht)?

6 Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, big deal?

6 Punkte

Zur Überraschung vieler hat das Michelson Morley Experiment hat im Jahre 1865 gezeigt dass sich Licht für jeden Beobachter mit der exakt gleichen Geschwindigkeit c bewegt.

Wie allgemein bekannt ist, führte dieser experimentelle Fakt zur Notwendigkeit der Lorentz Transformation.

$$t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) \tag{6.1}$$

$$x' = \gamma\,(x - vt) \qquad x = \gamma\,(x' + vt') \tag{6.2}$$

$$y' = y \qquad y = y' \tag{6.3}$$

$$z' = z \qquad z = z', \tag{6.4}$$

Versuchen wir als Erstes herauszufinden ob die Lichtgeschwindigkeit tatsächlich invariant unter der Lorenztransformation ist. Betrachten wir ein Photon (einen Lichtstrahl) das sich in eine beliebige Richtung bewegt. Zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ hat es die Position $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$. Zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{1}{c}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ die Position (x_2, y_2, z_2).

(a) (1 Punkt) Zeige für das Photon, dass es auch im gestrichenen Bezugssystem die Geschwindigkeit c besitzt.

Obwohl die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, verändert sich die Wellenlänge λ und damit auch die Frequenz f einer Lichtwelle unter der Lorentztransformation.

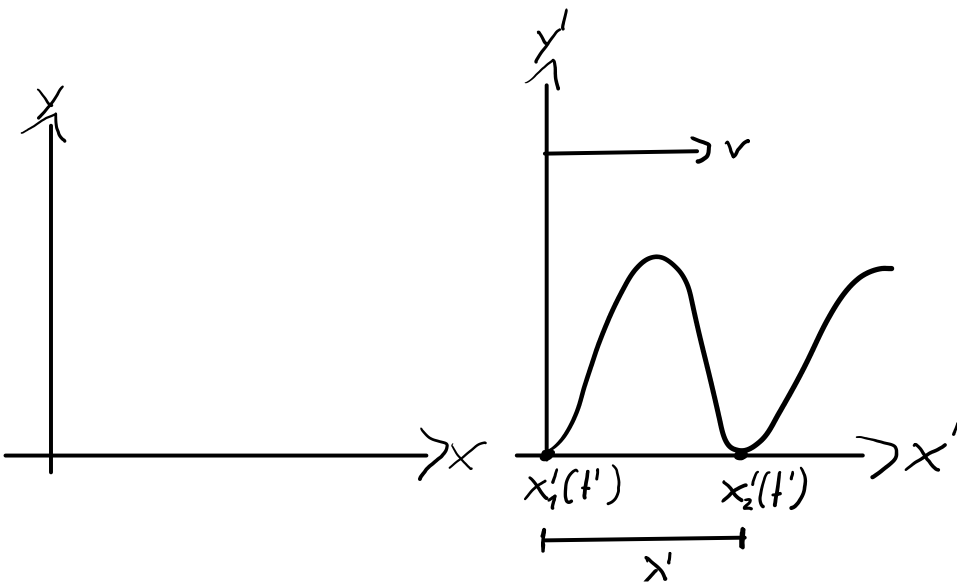


Figure 6.1: Skizze der Koordinatensysteme. Zum Zeitpunkt $t' = 0$ überlappen sich die Koordinatensysteme.

In Abbildung 6.1 sieht man eine Lichtwelle. Sei $x'_1(t')$ die Position des letzten ausgesendeten Wellentals und $x'_2(t')$ die Position des vorletzten ausgesendeten Wellentals. Zu $t' = 0$ gilt $x'_1 = 0$

und $x_2' = \lambda'$, wobei letzteres die Wellenlänge im bewegten Bezugssystem ist. Bestimme $x_2(t=0)$ und $x_1(t=0)$ und damit die Wellenlänge im Laborsystem, denn $\lambda = x_2(t=0) - x_1(t=0)$. Beachte dass sich Zeitpunkte auch transformieren!

(b) (2 Punkte) Bestimme $\frac{\lambda'}{\lambda}$ und $\frac{f'}{f}$.

Wir betrachten nun einen Körper der Masse m. Er habe im bewegten System die Geschwindigkeit $v_i' = 0$ und im stationären v_{in}, wobei in für initial steht. Der Körper sendet gleichzeitig zwei Photonen mit der gleichen Frequenz f' in entgegengesetzte Richtung aus. Da beide im bewegten System die gleiche Frequenz und somit den gleichen Impuls haben sollte sich seine Geschwindigkeit nicht ändern, d.h. $v_{\text{fin}}' = 0$, wobei fin für final steht.

(c) (1 Punkt) Mit Hilfe des Ergebnisses des Punktes (b), bestimme die Frequenzen der beiden Photonen im Ruhesystem f_1 und f_2.

Als nächstes wollen wir uns die Gleichung für die Impulserhaltung im Ruhesystem ansehen, diese ist

$$m_{\text{fin}} v_{\text{fin}} + p_{\text{ph},1} + p_{\text{ph},2} = m_{\text{in}} v_{\text{in}}, \tag{6.5}$$

wobei $p_{\text{ph},1}$ und $p_{\text{ph},2}$ die Impulse von Photonen sind. Wir sehen, es existiert eine Massendifferenz $\Delta m = m_{\text{fin}} - m_{\text{in}}$. Außerdem hat der Körper Energie $\Delta E = E_{\text{ph},1} + E_{\text{ph},2}$ verloren.

(d) (2 Punkte) Bringe Δm und ΔE in Verbindung und interpretiere.

7 Ein Atom im Käfig

11 Punkte

Wir wollen uns mit einem Atom in einem leeren optischen Käfig (in seinem Inneren ist nur ein Vakuum) beschäftigen. Klassisch würde sich der Zustand des Atoms also nicht ändern, da kein elektromagnetisches Feld existiert. Wie ist diese Situation nun im quantenmechanischen Fall? Normalerweise (in der Schrödingergleichung) machen wir das ja klassisch.

Der Einfachheit halber betrachten wir den eindimensionalen Fall mit nur einer Polarisation. Die klassischen Lösungen für das elektrische und magnetische Feld in einem optischen Käfig ($\mathbf{E} = 0$ am Rand, wobei der Käfig sich von $x = 0$ bis $x = L_x$ erstreckt) sind dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k(t) \sin(kx)\, \hat{\mathbf{e}}_y \tag{7.1}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_k \dot{A}_k(t) D(k) \cos(kx)\, \hat{\mathbf{e}}_z. \tag{7.2}$$

$A_k(t)$ beschreibt hier die Feldamplitude.

(a) (1 Punkt) Was sind die erlaubten Werte für k um die Randbedingugnen zu erfüllen. Was muss der Paramter $D(k)$ sein damit die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\dot{E} \tag{7.3}$$

erfüllt ist?

(b) (2 Punkte) Die Energie im EM Feld ist gegeben durch

$$H = \int \frac{dr}{2}\left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right] \tag{7.4}$$

Zeige dass man obige Gleichung als

$$H = \sum_k \left[\frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega^2 Q_k^2}{2}\right] \tag{7.5}$$

schreiben kann, wobei $Q_k = \lambda(k) A_k$ sei. Bestimme λ.

Nun quantisieren wir diese Hamiltonfunktion wie üblich. Das bedeutet $\dot{Q}_k \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial Q_k}$ und $Q_k \to \hat{Q}_k$. Desweiteren führen wir Erzeuger und Vernichter

$$a_k^{\pm} = \hat{Q}_k\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \pm \frac{\partial}{\partial Q_k}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \tag{7.6}$$

ein.

(c) (2 Punkte) Zeige, dass der Hamiltonoperator aus Punkt (b) durch $\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2})$ gegeben ist und berechne danach den elektrischen Feldoperator $\hat{\mathbf{E}}$ indem du $\hat{Q}_k$ durch Erzeuger und Vernichter ausdrückst und in Gleichung 7.1 einsetzt.

Als nächtes wollen wir den Hamiltonoperator des Gesamtsystems bestimmen. Wir nehmen hierfür an, dass das Atom gut durch ein Zweinieveausystem bestimmt ist. Sein Zustand ist also durch

$$|\psi\rangle = c_g|\psi_g\rangle + c_e|\psi_e\rangle$$

gegeben, wobei g for ground und e für exited state steht. Die interaktions-Hamiltonfunktion ist gegeben durch $\hat{H}_I = -e\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{r}$. Wenn wir annehmen, dass die Grundzustandsenergie ϵ_g des Atomsystems null ist, können wir die Gesamthamiltonian schreiben als

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(k)(a_k^{\pm} a_k + \frac{1}{2}) + \epsilon_e|\psi_e\rangle\langle\psi_e| + \sum_{\sigma=g,e}\sum_{\sigma'=g,e} |\psi_\sigma\rangle\langle\psi_\sigma|\hat{H}_I|\psi_{\sigma'}\rangle\langle\psi_{\sigma'}| \tag{7.7}$$

Den letzten Term können wir schreiben als

$$\hat{H}_I = \sum_k \gamma_k^+ \sigma^- a_k^+ + \gamma_k^- \sigma^+ a_k^- + \text{zusätzliche Terme},$$

wobei $\sigma^+ = |\psi_e\rangle\langle\psi_g|$ und $\sigma^- = |\psi_g\rangle\langle\psi_e|$. Wir wollen den Zustand des Gesamtsystems als

$$|\psi\rangle = c_g|\psi_g\rangle a_{k_1}^+|0\rangle + c_e|\psi_e\rangle|0\rangle \tag{7.8}$$

schreiben, wobei $k_1 = \pi/L$. $|0\rangle$ sei der Grundzustand des elektromagnetischen Feldes (der Vakuum-state). $a_{k_1}^+|0\rangle$ beschreibt den state in dem sich ein Photon in der niedrigsten Mode des EM Feldes befindet.

(d) (1.5 Punkte) Bestimme γ_k^+ und γ_k^-.

(e) (3 Punkte) Nehmen wir an, dass $\hbar\omega(k_1) = \epsilon_e$. Betimme die Zeitentwicklung von $c_g(t)$ und $c_e(t)$ und interpretiere.

(f) (1.5 Punkte) Warum können schwer andere states außer $|\psi_g\rangle a_{k_1}^+|0\rangle$ und $|\psi_e\rangle|0\rangle$ erreicht werden? Warum können wir die zusätzliche Terme in $\hat{H}_I$ zernachlässigen?

8 Quantum Bomb Tester

12 Punkte

You have been drafted by the government to help in the demining effort in a former war-zone. In particular, retreating forces have left very sensitive bombs in some of the sealed rooms. The bombs are configured such that if even one photon of light is absorbed by the fuse (i.e. if someone looks into the room), the bomb will go off. Each room has an input and output port which can be hooked up to external devices. An empty room will let light go from the input to the output ports unaffected, whilst a room with a bomb will explode if light is shone into the input port and the bomb absorbs even just one photon.

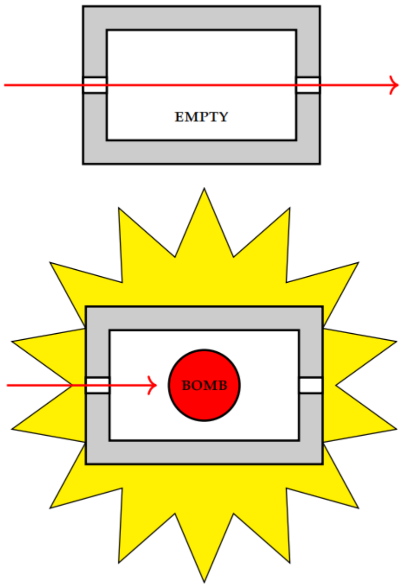


Figure 8.1: Quantum Bomb illustration.

Your task is to find a way of determining whether a room has a bomb in it without blowing it up, so that specialised (limited and expensive) equipment can be devoted to defusing that particular room. You would like to know with certainty whether a particular room had a bomb in it. To start with, consider the setup (see figure 8.2) where the input and output ports are hooked up in the lower arm of a Mach-Zehnder interferometer.

For the first part, let the beam-splitter have the effect:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

The state $|0\rangle$ is in vector notation $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $|1\rangle$ is $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(a) (1 Punkte) Assume an empty room. Send a photon to input port $|0\rangle$. Which detector, at the output port, will register the photon?

(b) (1 Punkte) Now assume that the room does contain a bomb. Again, send a photon to input port $|0\rangle$. Which detector will register the photon and with which probability?

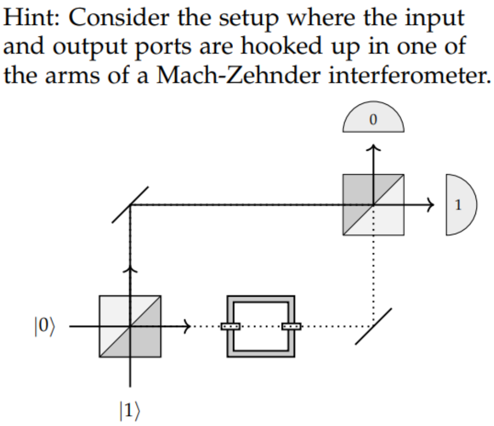


Figure 8.2: Mach Zehnder interferometer for bomb testing

(c) (2 Punkte) Design a scheme that allows you – at least part of the time – to decide whether a room has a bomb in it without blowing it up. If you iterate the procedure, what is its overall success rate for the detection of a bomb without blowing it up?

Next we assume that the two beam splitters in the interferometer are different. Say the first beamsplitter reflects incoming light with probability r and transmits with probability $t = 1 - r$ and the second one transmits with probability r and reflects with probability t. This makes the effect of the beamsplitters manifest as

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & i\sqrt{r} \\ i\sqrt{r} & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & i\sqrt{t} \\ i\sqrt{t} & \sqrt{r} \end{pmatrix}$$

(d) (3 Punkte) Would the new setup improve the overall success rate of the detection of a bomb without blowing it up?

There exists a scheme, involving many beamsplitters as shown in figure 8.3.

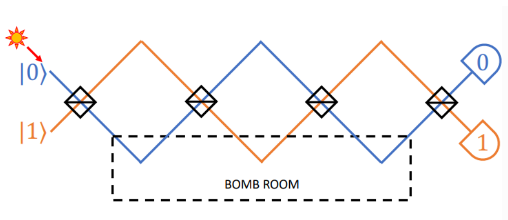


Figure 8.3: Perfect quantum bomb tester

This has the effect of

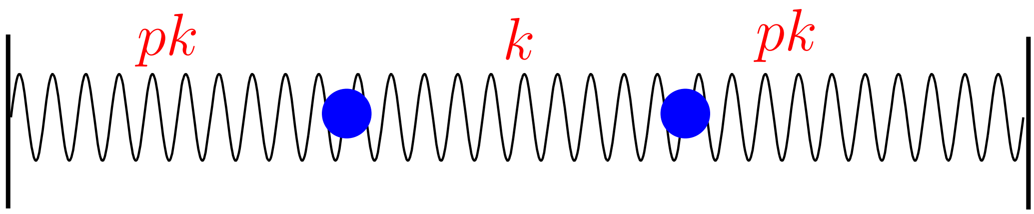
$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

This scheme utilizes something called "quantum Zeno effect".

(e) (5 Punkte) Try to work out the value for θ such that the success rate for detecting a bomb without blowing it up approaches 1!

9 Coupled Oscillator

17 Punkte *Enrico Arrigoni*, TU Graz



Consider two classical particles each with mass m connected with each other and to the two external fixed points via springs as indicated in the figure (which shows the equilibrium position). k and pk are the spring constants. The particles can only move in the horizontal direction.

(a) (2 Punkte) Determine the frequencies of the modes of the oscillation. For this purpose it might be useful to rewrite the equations of motion in terms of $x_1 + x_2$ and $x_1 - x_2$.

(b) (2 Punkte) Determine the time evolution of their coordinates (deviations from the equilibrium positions) $x_1(t)$ and $x_2(t)$ with given initial conditions

$$x_1(0) = x_0 \qquad x_2(0) = 0 \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

9.1 Quantum mechanical case

Consider now the quantum mechanical case. We take here $p = \frac{1}{4}$.

(c) (3 Punkte) Determine the ground-state energy of the system, as well as the expectation value $< x_1^2 >$ in the ground state.

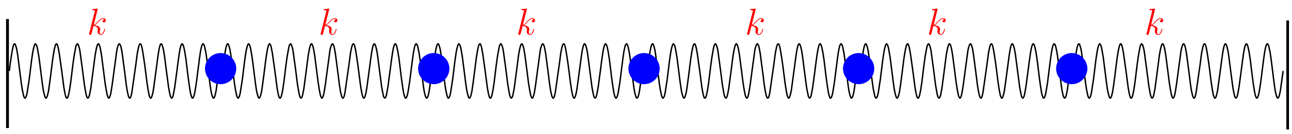
9.2 Quantum thermodynamics

The quantum mechanical system (again $p = \frac{1}{4}$) is in equilibrium at temperature T (you can work in units where the Boltzmann constant $k_B = 1$).

(d) (2 Punkte) Determine the internal energy U (average value of the total energy) of the system.

(e) (2 Punkte) Evaluate this explicitly for large temperatures, carry out a Taylor series in $1/T$ up to order T^1. Determine the heat capacity $C \equiv \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$ in that case. ($n = 2$ is the number of particles)

9.3 n particles



We now take $p = 1$ and consider the case of an arbitrary number n of particles. We start again with the classical case.

(f) (3 Punkte) Find the eigenfrequencies in this case

$$\textbf{Hint, Ansatz:} \qquad x_r(t) = \Re e A e^{i\omega t} \sin(kr),$$

where r equals the index of the masses. You might find the following relation useful

$$\sin(k(r \pm 1)) = \sin(kr)\cos(k) \pm \cos(kr)\sin(k) \tag{9.1}$$

9.4 $n \to \infty$ particles, quantum thermodynamics

Consider now again the quantum mechanical case at temperature T for $n \to \infty$.

(g) (3 Punkte) Determine the heat capacity $C \equiv \frac{1}{n}\frac{dU}{dT}$ of the system in the low-temperature limit (lowest nonvanishing order in a Taylor series in T).

$$\textbf{Hint:} \quad \int_0^\infty \frac{x\ dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solutions

S1 Bob der Brückenmeister

13 Punkte

(a)

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= dx^2\left(1 + y'^2)\right) \\ ds &= dx\sqrt{1 + y'^2} \end{aligned}$$

(b) Da das Seil eine homogene Massenverteilung besitzt können wir $dm = \frac{ds}{L}m = ds\rho$ schreiben. Damit gilt

$$\begin{aligned} F_x(x + dx) - F_x(x) &= 0 \\ F_x &= \text{const.} \\ F_y(x + dx) - F_y(x) - gdm &= 0 \\ F_y(x + dx) - F_y(x) &= g\rho ds \\ F_y(x + dx) - F_y(x) &= g\rho dx\sqrt{1 + y'^2} \\ F_y'(x) &= g\rho\sqrt{1 + y'^2}. \end{aligned}$$

(c) Wenn φ der Winkel zwischen Tangentialvektor und x-Richtung ist, so kann sehen, dass

$$\begin{aligned} \tan(\varphi) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{F_y(x)}{F_x} \\ F_y(x) &= F_x y' \\ F_y'(x) &= F_x y''. \end{aligned}$$

Vergleicht man dies mit der Lösung aus (b), so erhält man

$$\begin{aligned} F_x y'' &= g\rho\sqrt{1 + y'^2} \\ y'' &= \frac{g\rho}{F_x}\sqrt{1 + y'^2} \\ &= A\sqrt{1 + y'^2}. \end{aligned}$$

(d) Die Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung ist

$$\begin{aligned} z(x) &= y'(x) \\ z' &= A\sqrt{1 + z^2} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\frac{dz}{dx} &= A \\ \operatorname{arcsinh}(z) &= Ax + B \\ z &= \sinh(Ax + B) \\ y &= \frac{1}{A}\cosh(Ax + B) + C, \end{aligned}$$

wobei wir das Integral gelöst haben indem wir

$$\begin{aligned}
z &= \sinh(u) \\
dz &= \cosh(u)du \\
\sqrt{1+z^2} &= \sqrt{1+\sinh^2(u)} \\
&= \cosh(u) \\
\int \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} &= \int \frac{\cosh(u)}{\cosh(u)}du \\
&= u \\
&= \operatorname{arcsinh}(z)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
L &= \int ds \\
&= \int_{-x_0/2}^{x_0/2} dx\sqrt{1+y'^2} \\
&= \int_{-x_0/2}^{x_0/2} dx\sqrt{1+\sinh(Ax+B)^2} \\
&= \frac{1}{A}\sinh(Ax_0/2+B) - \frac{1}{A}\sinh(-Ax_0/2+B)
\end{aligned}$$

(f)

$$y(-x_0/2) = \frac{1}{A}\cosh(-Ax_0/2+B) + C$$

$$y(x_0/2) = \frac{1}{A}\cosh(Ax_0/2+B) + C$$

Subtrahiert man die zwei Gleichungen voneinander sieht man, dass

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{A}\cosh(Ax_0/2+B) - \frac{1}{A}\cosh(-Ax_0/2+B) \\
\rightarrow B &= 0,
\end{aligned}$$

was man folgern kann, da $\cosh(-x) = \cosh(x)$. Daher gilt für die L

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{A}\sinh(Ax_0/2) - \frac{1}{A}\sinh(-Ax_0/2) \\
&= \frac{2}{A}\sinh(Ax_0/2) \\
&\approx \frac{2}{A}\left(\frac{Ax_0}{2} + \frac{A^3x_0^3}{8*6}\right) \\
&= x_0\left(1 + \frac{A^2x_0^2}{24}\right) \\
A &= \sqrt{\left(\frac{L}{x_0} - 1\right)\frac{24}{x_0^2}} \\
F_x &= \frac{x_0\rho g}{\sqrt{24\left(\frac{L}{x_0} - 1\right)}}
\end{aligned}
$$

S2 Kernfusion: Bewegung geladener Teilchen im Tokamak

13 Punkte

(a) Wir schreiben Gleichung 2.1 auf und sehen

$$
\begin{aligned}
m\begin{pmatrix}\dot v_x\\ \dot v_y\\ \dot v_z\end{pmatrix} &= q\begin{pmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\ 0\\ B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}F_\perp\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\
m\dot v_x &= qv_yB+F\\
m\dot v_y &= -qv_xB\\
m\dot v_z &= 0\rightarrow v_z=\text{const.}
\end{aligned}
$$

Wir leiten nochmal ab und erhalten

$$
\begin{aligned}
m\ddot v_x &= q\dot v_yB\\
&= -\frac{q^2B^2}{m}v_x\\
0 &= \ddot v_x+\frac{q^2B^2}{m^2}v_x\\
v_x &= a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t),
\end{aligned}
$$

mit $\omega=\frac{qB}{m}$.

$$
\begin{aligned}
m\ddot v_y &= -q\dot v_xB\\
-\frac{m}{qB}\ddot v_y &= \dot v_x\\
&= \frac{qB}{m}v_y+\frac{F}{m}\\
\ddot v_y+\left(\frac{qB}{m}\right)^2\dot v_y &= -\frac{FqB}{m^2}\\
v_{y\mathrm{h}} &= c\cos(\omega t)+d\sin(\omega t)\\
v_{y\mathrm{p}} &= -\frac{F_\perp}{qB},
\end{aligned}
$$

wobei wir die partikuläre Lösung mittels eines Polynomansatzes gefunden haben. Um die Konstanten in Verbindung zu bringen nutzen wir

$$
\begin{aligned}
\dot v_y &= -\omega v_x\\
\omega\left(-c\sin(\omega t)+d\cos(\omega t)\right) &= -\omega\left(a\cos(\omega t)+b\sin(\omega t)\right)\\
&\rightarrow a=-d\\
&\rightarrow b=c.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned} v_x &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \\ v_y &= b\cos(\omega t) - a\sin(\omega t) - \frac{F_\perp}{qB}. \end{aligned}$$

(b) Wegen den Anfangsbedingungen sehen wir

$$\begin{aligned} v_x(0) &= 0 \to a = 0 \\ v_y(0) &= v_\mathrm{g} - \frac{F_\perp}{qB} \to c = v_\mathrm{g} \\ v_z(0) &= v_\parallel \to v_z = v_\parallel \\ v_x &= v_\mathrm{g}\sin(\omega t) \\ v_y &= v_\mathrm{g}\cos(\omega t) - \frac{F_\perp}{qB} \\ x &= \frac{v_\mathrm{g}}{\omega}(1-\cos(\omega t)) \\ y &= \frac{v_\mathrm{g}}{\omega}\sin(\omega t) - \frac{F_\perp}{qB}t \\ z &= v_\parallel t. \end{aligned}$$

Wir sehen also, dass der Gyrationsradius $v_\mathrm{g}/\omega = \frac{mv_\mathrm{g}}{qB}$. Die Elektronen gyrieren also mit einem kleineren Radius als die Ionen ($m_\mathrm{e} < m_\mathrm{p}$). Zusätzlich geht der Drift die entgegengesetzte Orientierung.

(c) Die homogene Lösung beschreibt das Gyrieren der Teilchen um die Magnetfeldlinie. Die partikuläre Lösung den Drift der durch externe Kräfte (die normal auf das Magnetfeld stehen) entsteht. Allgemein gilt daher $\mathbf{v}_\mathrm{D} = \frac{\mathbf{F}\times\mathbf{B}}{qB^2}$.

(d) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\mathrm{zf} &= \frac{mv_\parallel^2}{R}\hat{\mathbf{e}}_R \\ \mathbf{v}_\mathrm{D} &= \frac{\mathbf{F}_\mathrm{zf}\times\mathbf{B}}{qB^2} \\ &= \frac{mv_\parallel^2}{RqB}\hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

(e) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{B_z}{B_\phi} &= \frac{v_z}{v_\phi} \\ v_z &= v_\phi\frac{B_z}{B_\phi} \\ &\approx v_\parallel\frac{B_z}{B_\phi}, \end{aligned}$$

die Geschwindigkeit in z-Richtung ist daher die Summe von v_z und v_D. Damit sie Null ist muss daher

$$
\begin{aligned}
0 &= v_\parallel \frac{B_z}{B_\phi} + \frac{mv_\parallel^2}{RqB} \\
\frac{B_z}{B_\phi} &= -\frac{mv_\parallel}{RqB}.
\end{aligned}
$$

(f) Da $\frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel} \ll 1$ ist

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} &= \frac{v_\mathrm{D}\sin(\theta)}{\frac{B_\theta v_\parallel}{B} + v_\mathrm{D}\cos(\theta)} \\
&= \frac{\sin(\theta)}{\frac{B_\theta v_\parallel}{Bv_\mathrm{D}} + \cos(\theta)} \\
&\approx \frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel}\sin(\theta) \\
\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) &= -\frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel}\cos(\theta) \\
r &= r_0 \exp\left(-\frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel}\cos(\theta)\right).
\end{aligned}
$$

Die Teilchen oszillieren also zwischen $r_0 \exp\left(-\frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel}\right)$ und $r_0 \exp\left(\frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel}\right)$ beziehungsweise $r_0 \pm r_0 \frac{Bv_\mathrm{D}}{B_\theta v_\parallel}$.

S3 Gezeiten

13 Punkte

(a)

$$\begin{aligned} F_{\text{gra}}(d_{\text{M}} - R_{\text{E}}) - F_{\text{gra}}(d_{\text{M}}) &= \frac{GM_{\text{M}}m}{(d_{\text{M}} - R_{\text{E}})^2} - \frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2} \\ &= \frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2(1 - R_{\text{E}}/d_{\text{M}})^2} - \frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2} \\ &\approx \frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2}\left(1 + 2\frac{R_{\text{E}}}{d_{\text{M}}}\right) - \frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2} \\ &= \frac{2GMmR_{\text{E}}}{d_{\text{M}}^3} \end{aligned}$$

Mittels der Taylorreihenentwicklung

$$(x-1)^\alpha = 1 - \alpha x \dots$$

(b) Der Massenmittelpunkt der Erde ist im Kräftegleichgewicht, die Gravitationskraft des Mondes und der die Fliehkraft der RoR sind daher

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{gra}} + \mathbf{F}_{\text{zf}} &= 0 \\ \mathbf{F}_{\text{zf}} &= -\mathbf{F}_{\text{gra}} \\ &= -\frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2}\hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned}$$

Wenn wir uns Abbildung 3.1 anschauen sehen wir, dass

$$\begin{aligned} -\nabla\Phi_{\text{Zf}} &= -\nabla\frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2} r\cos(\theta_{\text{M}}) \\ &= -\nabla\frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2} z \\ &= -\frac{GM_{\text{M}}m}{d_{\text{M}}^2}\hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

(c) Der Abstand l vom Massenmittelpunkt des Mondes bis zu einem Punkt auf der Erdoberfläche bei (r, θ_{M}) kann man schreiben als

$$
\begin{aligned}
l &= \sqrt{r^2 \sin{(\theta_\mathrm{M})}^2 + (d_\mathrm{M} - r\cos\theta_\mathrm{M})^2} \\
&= \sqrt{r^2 + d_\mathrm{M}^2 - 2d_\mathrm{M} r\cos{(\theta_\mathrm{M})}} \\
&= d_\mathrm{M}\sqrt{1 + r^2/d_\mathrm{M}^2 - 2r\cos{(\theta_\mathrm{M})}/d_\mathrm{M}} \\
&= d_\mathrm{M}\sqrt{1+\Delta} \\
\Phi_\mathrm{gra} &= -\frac{GM_\mathrm{M}m}{l} \\
&= -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}\sqrt{1+\Delta}} \\
&\approx -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}}\left(1 - \frac{r^2}{2d_\mathrm{M}^2} + \frac{2r\cos{(\theta_\mathrm{M})}}{2d_\mathrm{M}} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\frac{\Delta^2}{2}\right) \\
\Delta^2 &\approx \frac{4r^2\cos{(\theta_\mathrm{M})}^2}{d_\mathrm{M}^2} \\
\Phi_\mathrm{gra} &\approx -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}}\left(1 - \frac{r^2}{2d_\mathrm{M}^2} + \frac{r\cos{(\theta_\mathrm{M})}}{d_\mathrm{M}} + \frac{3r^2\cos{(\theta_\mathrm{M})}^2}{2d_\mathrm{M}^2}\right) \\
\Phi_\mathrm{M}(\theta_\mathrm{M}, r) &= \Phi_\mathrm{gra} + \Phi_\mathrm{Zf} \\
&\approx -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}}\left(1 - \frac{r^2}{2d_\mathrm{M}^2} + \frac{r\cos{(\theta_\mathrm{M})}}{d_\mathrm{M}} + \frac{3r^2\cos{(\theta_\mathrm{M})}^2}{2d_\mathrm{M}^2}\right) + \frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}^2} r\cos{(\theta_\mathrm{M})} \\
&= -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}}\left[1 + \frac{r^2}{2d_\mathrm{M}^2}\left(3\cos{(\theta_\mathrm{M})}^2 - 1\right)\right] \\
&= -\frac{GM_\mathrm{M}m}{d_\mathrm{M}}\left[1 + \frac{r^2}{4d_\mathrm{M}^2}\left(3\cos{(2\theta_\mathrm{M})} + 1\right)\right].
\end{aligned}
$$

Wobei wir Taylorreiheentwicklungen genutzt haben und Terme die mit $(\frac{r}{d_\mathrm{M}})^4$ oder höher Ordnung skalieren weggelassen haben.

(d) (1 Punkt) Die Equipotentialfläche ändert sich um mgh. Nachdem wir den Nullpunkt des Gezeitenpotentials in den Massenmittelpunkt der Erde gelegt haben, können wir daher für $r = R_\mathrm{E}$ schreiben, dass

$$
\begin{aligned}
0 &= mgh(\theta_\mathrm{M}, \theta_\mathrm{S}, R_\mathrm{E}) + \Phi_\mathrm{M}(\theta_M, R_\mathrm{E}) + \Phi_\mathrm{S}(\theta_S, R_\mathrm{E}) \\
h(\theta_\mathrm{M}, \theta_\mathrm{S}) &= \frac{GM_\mathrm{M}}{d_\mathrm{M}g}\frac{R_\mathrm{E}^2}{4d_\mathrm{M}^2}\left(3\cos{(2\theta_\mathrm{M})} + 1\right) + \frac{GM_\mathrm{S}}{d_\mathrm{S}g}\frac{R_\mathrm{E}^2}{4d_\mathrm{S}^2}\left(3\cos{(2\theta_\mathrm{S})} + 1\right)
\end{aligned}
$$

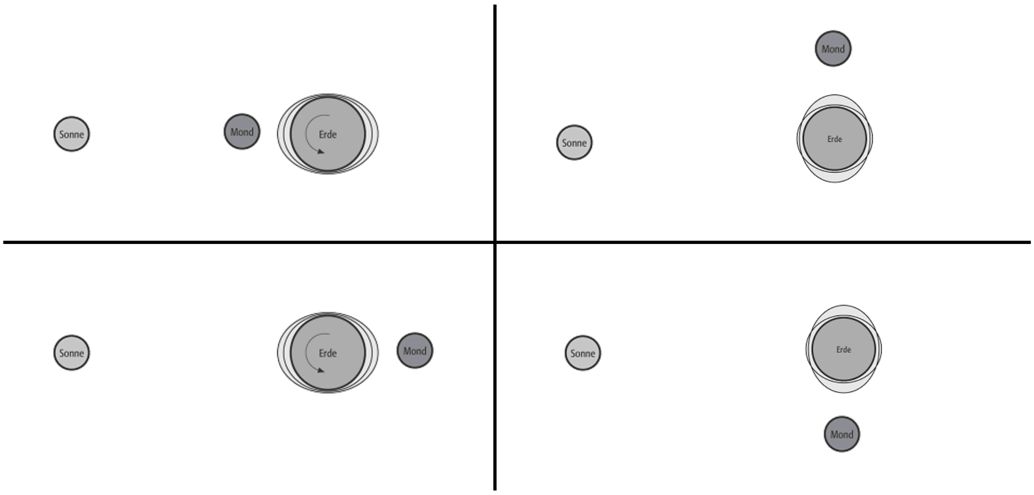


Figure S3.1: Konstellationen für eine Springflut, links, und eine Nippflut, rechts.

(e)

$$\frac{h(\theta_{\mathrm{M}} = 0^\circ, \theta_{\mathrm{S}} = 0^\circ)}{h(\theta_{\mathrm{M}} = 0^\circ, \theta_{\mathrm{S}} = 90^\circ)} = 1.9$$

(f) Der zeitliche Abstand zwischen Ebbe und Flut beträgt zirka 6 Stunden. Entweder befüllen wir unser Kraftwerk zur Flutzeit oder, 6 Stunden später, lassen das Wasser zu Ebbe aus dem Kraftwerk fließen. Der Tidenhub h_{T}, der Höhenunterschied zwischen Ebbe und Flut, beträgt durch den Mond 0.54 m. Die Höhe um die sich der Massenmittelpunkt beim Benutzen des Kraftwerkes ändert ist jedoch nur $h_{\mathrm{T}}/2$. Daher haben wir eine Leistung von

$$\begin{aligned} L &= \frac{0.5\rho A h_{\mathrm{T}} g h_{\mathrm{T}}}{2 * 6 * 3600} \\ &\approx 81 \text{ GW}. \end{aligned}$$

S4 A glimpse on quantum cryptography: Solutions

1) Most easily by direct inspection:

$$(\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{e}_u)|\sigma_u=+1\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{S4.1}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\cos(\theta/2)+\sin\theta\sin(\theta/2)\\ \sin\theta\cos(\theta/2)-\cos\theta\sin(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{S4.2}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}(\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2))\cos(\theta/2)+2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\sin(\theta/2)\\ 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)\cos(\theta/2)-(\cos^2(\theta/2)-\sin^2(\theta/2))\sin(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{S4.3}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos^3(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\cos^2(\theta/2)+\sin^3(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{S4.4}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos(\theta/2)\\ \sin(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{S4.5}$$

And similarly for the other eigenvector.

The probability for finding eigenvalue $\frac{\hbar}{2}$ is $p_u^+ = |\langle\sigma_u=+1|\sigma_z=+1\rangle|^2 = \cos^2(\theta/2)$, and the system is afterwards in state $|\sigma_u=+1\rangle$. The probability for finding eigenvalue $-\frac{\hbar}{2}$ is $p_u^- = |\langle\sigma_u=-1|\sigma_z=+1\rangle|^2 = \sin^2(\theta/2)$, and the system is afterwards in state $|\sigma_u=-1\rangle$.

2) First possibility: We had $|\sigma_u=+1\rangle$ after the first measurement. If we want to go back to $|\sigma_z=+1\rangle$, we get the probability $p_z^+ = |\langle\sigma_z=+1|\sigma_u=+1\rangle|^2 = \cos^2(\theta/2)$. The total probability for this path is $p_1 = p_u^+ p_z^+ = \cos^4(\theta/2)$.
Second possibility: We had $|\sigma_u=-1\rangle$ after the first measurement. Now we get $p_z^+ = |\langle\sigma_z=+1|\sigma_u=-1\rangle|^2 = \sin^2(\theta/2)$. This path gives probability $p_1 = p_u^- p_z^+ = \sin^4(\theta/2)$.
Since the two paths are additive, the total probability to get $|\sigma_z=+1\rangle$ back after the second measurement is $P_{++}(\theta) = \cos^4(\theta/2)+\sin^4(\theta/2) = \frac{1}{2}(1+\cos^2(\theta))$.

3) Gives the same probability as before, $P_{--} = P_{++}$.

4) The identities can be inverted to $|\sigma_z=\pm1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_x=+1\rangle \pm |\sigma_x=-1\rangle)$. Inserting this into the spin state above, and multiplying out all tensor products, we arrive immediately at:

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sigma_x^a=+1\rangle\otimes|\sigma_x^b=+1\rangle + |\sigma_x^a=-1\rangle\otimes|\sigma_x^b=-1\rangle\right) \tag{S4.6}$$

That means it has both in z and in x projection the same form.

5) Alice measures either $+\frac{\hbar}{2}$ or $-\frac{\hbar}{2}$, irrespective of the axis. Since the state $|\chi\rangle$ has equal contributions from $|\sigma_z^a=+1\rangle$ and $|\sigma_z^a=-1\rangle$, the probabilities for the two states is the same, i.e. $p=1/2$ for all possible measurements.
The states after the measurements are just the projections to the eigenstates:
z axis, $+\frac{\hbar}{2}$: $|\sigma_z^a=+1\rangle\otimes|\sigma_z^b=+1\rangle$
z axis, $-\frac{\hbar}{2}$: $|\sigma_z^a=-1\rangle\otimes|\sigma_z^b=-1\rangle$
x axis, $+\frac{\hbar}{2}$: $|\sigma_x^a=+1\rangle\otimes|\sigma_x^b=+1\rangle$
x axis, $-\frac{\hbar}{2}$: $|\sigma_x^a=-1\rangle\otimes|\sigma_x^b=-1\rangle$

6) If the two axes are the same, e.g. the z axis for Alice and Bob as in case (a), the results is straight forward. If Alice measures $+\frac{\hbar}{2}$, Bob measures also $+\frac{\hbar}{2}$ with probability $p = 1.0$, see first line above in point 5). If Alice measures $-\frac{\hbar}{2}$, Bob measures also $-\frac{\hbar}{2}$ with probability $p = 1.0$, see second line above.
   If the two axis are different, it works as follows, e.g. for case (b): Alice measures along z axis. Irrespective of what she measures, the state for Bob is polarized along z. But Bob measures along x, that means he will get both possible measurements $\pm\frac{\hbar}{2}$ with equal possibility $p = 0.5$. This follows from $|\sigma_z = \pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_x = +1\rangle \pm |\sigma_x = -1\rangle)$
   Case (c) is equivalent to case (b), and case (d) equivalent to case (a). That means that they will get the same results only if they measure in the same direction.

7) This is exactly what we have calculated before. One can interpret the spy as an intermediate measurement. The measurement of Alice prepares the spin for Bob in z direction. The spy measures in a different direction, and Bob again in z direction. According to our result above, the probability that Alice and Bob find the same result is $P(\theta_s) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta_s)$.

8) We have $P(0) = 1.0$ and $P(\pi/2) = 0.5$. If the spy chooses $\theta_s = 0$, i.e. z axis, or $\theta_s = \pi/2$, i.e. x axis, at random, the expectation value that Alice and Bob find the same value is $\bar{p} = 3/4$.

9) If Alice and Bob measure in the same direction, all results/measurements must be the same. If just a single result is different (in an ideal experimental setup), there must be a spy.

10) The only chance for the spy to remain invisible is that Alice and Bob always find the same result when they choose the same axis for measurement. For each pair of spins, there is a chance of 1/2 that they choose the same axis in their measurement. From the expectation value above, the probability that the results of Alice and Bob differ is $1 - \bar{p} = 1/4$. Note that the spy is detected if the results differ, which occurs with total probability of $1/2 * 1/4 = 1/8$. With probability 7/8 he remains invisible.
    On first sight, this looks very inefficient and insecure. But the spy needs to stay invisible for ALL pairs of spins in the subset N'. The probability that the spy remains undetected is therefore $(7/8)^{N'}$. For $N' = 200$ we get a probability of only $(7/8)^{200} \approx 2.5 \times 10^{-12}$ that the spy remains invisible.

11 8 15 376
Felix Hellwedl

1) Begründe die Annahmen

Annahme 1: Die Dicke δ ist klein gegenüber den Rohrabmessungen l und kann somit vernachlässigt werden.

Dicke Flammenfront $\delta \sim$ Eindringtiefe Wärme in charakteristischer Reaktionszeit τ

$$\sim \sqrt{\chi \tau} \quad , \chi \text{ Wärmeleitkoeffizient}$$

Annahmen:

Gas schlechter Wärmeleiter: χ <<
Gas verbrennt „schnell": τ <

$$\Rightarrow \delta \sim \sqrt{\chi \tau} << l \quad \text{falls } l \sim cm$$

Annahme 2: Die Flammenfront breitet sich weit unter der Schallgeschwindigkeit c aus.

Ausbreitungsgeschwindigkeit der Flamme $v_1 \sim \frac{\delta}{\tau} \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau}}$

$\chi \sim$ (mittlere freie Weglänge) (thermische Geschwindigkeit)

$=$ (mittlere freie Flugzeit τ_{fr})(thermische Geschwindigkeit)^2

$\sim \tau_{fr} c^2$ da (thermische Geschwindigkeit) $\sim c$

$$\Rightarrow v_1 \sim \sqrt{\frac{\chi}{\tau}} \sim c\sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{c} \sim \sqrt{\frac{\tau_{fr}}{\tau}}$$

Reaktion geht nur im Bruchteil aller Teilchenkollisionen vonstatten

11815376
Felix Hallwedl

$$\Rightarrow \frac{T_{fr}}{T} << 1$$

$$\Rightarrow \frac{v_1}{c} \sim \sqrt{\frac{T_{fr}}{T}} << 1$$

2) Welche Gleichung für den Druck ergibt sich aus den Gleichungen (13)?

Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}' = 0$

Eulersche Bewegungsgleichung $\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}' = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p'$

$\vec{v}', p'$ Abweichungen von den Gleichgewichtsgrößen
$\vec{v}, p$ konstant

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}' = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p' \quad \Big| \; \vec{\nabla}\cdot$$

linke Seite:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\partial v'}{\partial t} + (\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}'\right) = \vec{\nabla}\cdot\frac{\partial v'}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\left((\vec{v}\vec{\nabla})\vec{v}'\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}'}_{0} + (\vec{v}\vec{\nabla})\underbrace{\vec{\nabla}\cdot\vec{v}'}_{0} = 0$$

rechte Seite:

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p'\right) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}p') = -\frac{1}{\rho}\Delta p'$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\Delta p'$$

$$\Delta p' = 0$$

1 1 8 1 5 3 7 6
Felix Hallwachs

3. Die Störung S ist periodisch in y und t. Welche Randbedingungen der Gleichungen (13) sind kompatibel dazu? Wähle möglichst einfache Randbedingungen!

Periodische Randbedingungen für $\vec{v}'$, $\dot{\vec{v}}'$, p' stellen die geringste Zahl an Bedingungsgleichungen.

4. Bestimme Druckabweichungen $p_1'(x, y, t)$ $p_2'(x, y, t)$ in den Gasgemischen 1 und 2 aus den in 2 bestimmten Gleichung unter Berücksichtigung der angenommenen Randbedingungen

Ansatz: $p_1 \sim \underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{periodisch in } y}\underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{periodisch in } t}\underbrace{\exp(\ldots)}_{\to 0 \text{ für } x \to -\infty}$

$$p_1 \sim \exp(iky)\exp(i\omega t)\exp(kx)$$
$$= \exp(kx + iky + i\omega t)$$

$$p_2 \sim \underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{periodisch in } y}\underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{periodisch in } t}\underbrace{\exp(\ldots)}_{\to 0 \text{ für } x \to \infty}$$

$$p_2 \sim \exp(iky)\exp(i\omega t)\exp(-kx)$$
$$= \exp(-kx + iky + i\omega t)$$

5. Bestimme eine homogene Lösung $\vec{v}'(x, y, t)$ der Gleichungen (14) für das Gasgemisch 2. Ist sie für den gesamten Bereich physikalisch sinnvoll? Es kann $v_z = 0$ angenommen werden.

Homogene Eulersche Gleichung mit $\vec{v} \sim e_x$

$$\frac{\partial \vec{v}_2'}{\partial t} + v_2 \frac{\partial \vec{v}_2'}{\partial x} = 0$$

11815376
Felix Hallwedl

in Komponenten:

$$\frac{\partial v'_{2,x}}{\partial t} + v\frac{\partial v'_{2,x}}{\partial x} = 0 \quad (\Rightarrow \omega = -kv)$$

$$\frac{\partial v'_{2,y}}{\partial t} + v\frac{\partial v'_{2,y}}{\partial x} = 0$$

, z-Komponente verschwindet laut Angabe

Kontinuitätsgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}'_2 = 0$$

in Komponenten

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial v'_x}{\partial x} = -\frac{\partial v'_y}{\partial y}$$

$$\Rightarrow v'_x \sim v'_y$$ für „Exponential ansätze"

Ansatz: $$v'_x \sim \underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{periodisch in } y}\ \underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{periodisch in } t}\ \underbrace{\exp(\ldots)}_{\text{beschränkt für } x \to \infty}$$

$$= \exp(iky)\exp(i\omega t)\exp\left(-i\frac{\omega}{v}x\right)$$

$$= \exp\left(iky - i\frac{\omega}{v_2}x + i\omega t\right)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$-i\frac{\omega}{v}v'_x + ikv'_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v'_y = \frac{\omega}{kv_2}v'_x$$

ω reell: Lösung stabil

ω rein imaginär $\mathrm{Im}\{\omega\} > 0$: Lösung instabil in t, stabil in $x > 0$

(Bereich des Gasgemisch 2)

11815376
Felix Hallwedl

6. Aus den Drücken bestimme daraus die Geschwindigkeitsabweichungen $\vec{v}_1'$, $\vec{v}_2'$ für beide Gaswirbel abermals mit verschwindender z-Komponente. Beachte die homogene Lösung aus dem vorherigen Unterpunkt.

inhomogene Eulergleichung mit $\vec{v} \sim \hat{e}_x$

$$\frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + v \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p'$$

in Komponentenform mit verschwindender z-Komponente

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} + v \frac{\partial v_x'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y'}{\partial t} + v \frac{\partial v_y'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} .$$

Ansätze für die Geschwindigkeiten

$$p_1' \sim \exp(\underbrace{+kx + iky + i\omega t})$$

$$\Rightarrow v_{1,x}, v_{1,y} \sim \exp(\dots)$$

$$p_2' \sim \exp(\underbrace{-kx + iky + i\omega t})$$

$$\Rightarrow v_{2,x}, v_{2,y} \sim \exp(\dots)$$

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt für die partikuläre Lösung

$$+k v_{1,x} + ik v_{1,y} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{1,y} = i v_{1,x}$$

$$-k v_{2,x} + ik v_{2,y} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{2,y} = -i v_{2,x}$$

11 815376
Felix Hallbrecht

Aus der Eulergleichung folgt für den Druck im Gasgemisch

$$i\omega v'_{1,x} + v(-k)\, v'_{1,x} = -\frac{1}{\rho_1}(-k)\, p_1$$

$$\Rightarrow p'_1 = \frac{\rho_1}{k}(i\omega - v_1 k)\, v'_{1,x} \quad ✓$$

$$i\omega v'_{2,y} + v(-k)\, v'_{2,y} = -\frac{1}{\rho_1}(ik)\, p'_1$$

$$\Rightarrow p'_1 = i\frac{\rho_1}{k}(i\omega - v_1 k)\, v'_{2,y} \quad ✓$$

insgesamt für p'_1, $\vec{v}_1$

$$p'_1 = \frac{\rho_1}{k}(i\omega - v_1 k)\, A \exp(-kx + iky + i\omega t)$$

$$v'_{1,x} = A \cdot \exp(+kx + iky + i\omega t)$$

$$v'_{1,y} = iA \exp(+kx + iky + i\omega t)$$

Für die partikulären Lösungen im Gasgemisch 2 folgt analog

$$v'_{2,x} = B \exp(-kx + iky + i\omega t)$$

$$v'_{2,y} = -iB \exp(-kx + iky + i\omega t)$$

$$p'_2 = -B\rho_2\left[v_2 + \frac{i\omega}{k}\right]\exp(-kx + iky - i\omega t)$$

Homogene Anteile

$$v'^{(H)}_{2,x} = C \exp(-kx + iky + i\omega t)$$

$$v'^{(H)}_{2,y} = \frac{\omega}{k v_2}\, C \exp(-kx + iky + i\omega t)$$

11815376
Felix Hallwachl

7. Die erhaltenen Lösungen für $\tilde{v}_1'$, $\tilde{p}_1'$, $\tilde{v}_2'$, $\tilde{p}_2'$ ließen sich prinzipiell in die Gleichungen (16), (15) einsetzen, um ein Gleichungssystem für die Koeffizienten zu erhalten.

Eine längere Rechnung würde dann unter der Verwendung von $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ auf folgende Bedingung für deren Lösbarkeit führen:

$$\Omega^2 (v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0$$

Welche Lösungen $\Omega \equiv i\omega$ sind für obige Gleichung möglich?

$v_1 > v_2$: 2 negative reelle Nullstellen
2 konjugiert komplexe Nullstellen mit negativem Realteil

$v_1 < v_2$: 2 reelle Nullstellen, eine davon positiv

8. Was lässt sich aus der Stabilität der Flammenfront aussagen? Findet sich diese Modellösung auch in der realen Welt? Warum (nicht)?

Gasgemisch 2 (verbrannt) heißer als Gasgemisch 1 (unverbrannt)

$\Rightarrow \rho_2 < \rho_1$

$\Rightarrow v_1 > v_2$

$\Rightarrow \Omega \equiv i\omega$ reell

$\Rightarrow$ Flammenfront instabil

118153776
Felix Hallwachs

reale Welt: stabile Flammen (fronten) existieren

Grund für Fehlvorhersage: mehrere Effekte nicht berücksichtigt
- thermische Effekte
- ...

S6 Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, big deal?

6 Punkte

(a)

$$\begin{aligned}
t_2'^2c^2 - x_2'^2 - y_2'^2 - z_2'^2 &= c^2\gamma^2\left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2}\right)^2 - \gamma^2\left(x_2 - vt_2\right)^2 - y_2^2 - z_2^2 \\
&= c^2\gamma^2\left[t_2^2 - \frac{2vx_2t_2}{c^2} + \frac{v^2x_2^2}{c^4} - \frac{x_2^2}{c^2} + \frac{2vx_2t_2}{c^2} - \frac{v^2t_2^2}{c^2}\right] - y_2^2 - z_2^2 \\
&= c^2\gamma^2\left[x_2^2\left(\frac{v^2}{c^4} - \frac{1}{c^2}\right) + t_2^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right] - y_2^2 - z_2^2 \\
&= x_2^2\frac{\frac{v^2}{c^2} - 1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} + t_2^2\frac{c^2 - v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - y_2^2 - z_2^2 \\
&= t_2^2c^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\
&= \left(\frac{1}{c}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}\right)^2 c^2 - x_2^2 - y_2^2 - z_2^2 \\
&= 0 \\
\frac{\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}}{t_2'} &= c
\end{aligned}$$

Obwohl die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, verändert sich die Wellenlänge λ und damit auch die Frequenz f einer Lichtwelle unter der Lorentztransformation.

(b) $t' = 0$ korrespondiert zu

$$t = \gamma\frac{vx'}{c^2}.$$

Für den Punkt x_2 wäre dies also

$$\begin{aligned}
t &= \gamma\frac{vx_2'}{c^2} \\
&= \gamma\frac{v\lambda'}{c^2}.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
x_2(t = 0) &= x_2(t = \gamma\frac{v\lambda'}{c^2}) - c\cdot\gamma\frac{v\lambda'}{c^2} \\
&= \gamma\lambda'\left(1 - \frac{v}{c}\right)
\end{aligned}$$

Analog kann man zeigen, dass $x_1(t = 0) = 0$, daher ist

$$
\begin{aligned}
\lambda &= x_2(t=0) - x_1(t=0) \\
&= \gamma\lambda'\left(1 - \frac{v}{c}\right) \\
\frac{\lambda'}{\lambda} &= \frac{1}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \\
\frac{f'}{f} &= \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right).
\end{aligned}
$$

(c) Wir benutzen den Subskript 1 um das Photon welches sich in positive x-Richtung bewegt zu beschreiben und den Subskript 2 für das in negative x-Richtung bewegende Photon.

$$
\begin{aligned}
f_1 &= \frac{f'}{\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)} \\
f_2 &= \frac{f'}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)}
\end{aligned}
$$

(d) Im gestrichenen System werden zwei Photonen mit dem gleichen Impuls in gegenüberliegende Richtungen Photonen geschickt, daher ändert sich die Geschwindigkeit der Masse nicht und $v_{\text{fin}} = v_{\text{in}} = v$. Wir schreiben die Impulserhaltung um, wobei darauf zu achten ist, dass wir Photon 2 in die negative x Richtung senden, daher ist der Impuls negativ und wir schreiben

$$
\begin{aligned}
v\left(m_{\text{fin}} - m_{\text{in}}\right) &= -\left(p_1 + p_2\right) \\
v\Delta m &= -\left(\frac{hf_1}{c} - \frac{hf_1}{c}\right) \\
&= \frac{hf'}{c\gamma}\left(\frac{1}{1 + \frac{v}{c}} - \frac{1}{1 - \frac{v}{c}}\right) \\
&= \frac{hf'}{c\gamma}\left(\frac{1 - \frac{v}{c} - \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \\
&= -\frac{2hf'\gamma v}{c^2} \\
\Delta mc^2 &= -2hf'\gamma.
\end{aligned}
$$

Die Energie, die der Körper verloren hat ist

$$
\begin{aligned}
\Delta E &= -hf_1 - hf_2 \\
&= -\frac{hf'}{\gamma}\left(\frac{1}{1 - \frac{v}{c}} + \frac{1}{1 + \frac{v}{c}}\right) \\
&= -\frac{hf'}{\gamma}\left(\frac{1 + \frac{v}{c} + 1 - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \\
&= -2hf'\gamma.
\end{aligned}
$$

Masse ist also eine Form von Energie $\Delta E = \Delta mc^2$.

S7 Ein Atom im Käfig

11 Punkte

Frage (a): Was sind die erlaubten Werte für k um die Randbedingungen zu erfüllen? Was muss der Parameter $D(k)$ sein, damit die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}} \tag{S7.1}$$

erfüllt ist?

Lösung (a):

Erlaubte Werte für k: Um die Randbedingungen zu erfüllen, die besagen, dass das elektrische Feld $\mathbf{E}$ an den Rändern des optischen Käfigs (bei $x = 0$ und $x = L_x$) Null sein muss, folgt, dass:

$$k = \frac{n\pi}{L_x}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Das sind die erlaubten Werte für k.

Bestimmung von $D(k)$: Die Maxwell-Gleichung $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\dot{\mathbf{E}}$ führt zu:

$$D(k) = -\frac{1}{kc^2}$$

Frage (b):

Die Energie im elektromagnetischen Feld ist gegeben durch

$$H = \int \frac{dr}{2}\left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right] \tag{S7.2}$$

Zeige, dass man obige Gleichung als

$$H = \sum_k \left[\frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega^2 Q_k^2}{2}\right] \tag{S7.3}$$

schreiben kann, wobei $Q_k = \lambda(k)A_k$ sei. Bestimme λ.

Lösung (b):

Zunächst betrachten wir die Ausdrücke für das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und das magnetische Feld $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k(t)\sin(kx)\hat{\mathbf{e}}_y, \tag{S7.4}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_k \dot{A}_k(t)D(k)\cos(kx)\hat{\mathbf{e}}_z. \tag{S7.5}$$

Die Quadrate der Felder sind:

$$\mathbf{E}(x)^2 = \left(\sum_k A_k(t)\sin(kx)\right)^2,$$

$$\mathbf{B}(x)^2 = \left(\sum_k \dot{A}_k(t) D(k) \cos(kx) \right)^2 .$$

Integrieren wir diese Ausdrücke über den Raum, so erhalten wir (mit Hilfe von Orthogonalitätsbedingungen der Sinusfunktionen von unterschiedlichen k's):

$$\int_0^{L_x} E^2\, dx = \sum_k A_k(t)^2 \int_0^{L_x} \sin^2(kx)\, dx = \sum_k \frac{L_x}{2} A_k(t)^2,$$

$$\int_0^{L_x} B^2\, dx = \sum_k \dot{A}_k(t)^2 D(k)^2 \int_0^{L_x} \cos^2(kx)\, dx = \sum_k \frac{L_x}{2} \dot{A}_k(t)^2 D(k)^2.$$

Erinnern wir uns daran, dass $D(k) = -\frac{1}{kc^2}$ und $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, so gilt:

$$D(k)^2 = \frac{1}{k^2 c^4}$$

Einsetzen in die Energieformel ergibt:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k \left[\varepsilon_0 L_x A_k(t)^2 + \frac{L_x}{k^2 c^4 \mu_0} \dot{A}_k(t)^2 \right].$$

Umformulierung in harmonische Oszillatorform:

$$H = \sum_k \left[\frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega_k^2 Q_k^2}{2} \right],$$

wobei

$$Q_k = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 L_x}}{\omega} A_k, \quad \omega_k = kc.$$

Damit ist $\lambda(k) = \frac{\sqrt{\varepsilon_0 L_x}}{\omega}$.

Frage (c):

(c) (2 Punkte) Zeige, dass der Hamiltonoperator aus Punkt (b) durch

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega (a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2}) \tag{S7.6}$$

gegeben ist und berechne danach den elektrischen Feldoperator $\hat{\mathbf{E}}$, indem du $\hat{Q}_k$ durch Erzeuger und Vernichter ausdrückst und in Gleichung S7.4 einsetzt.

Quantenmechanische Umformulierungen und Lösung: Die Umformulierungen für die Quantisierung der Hamiltonfunktion sind wie folgt:

$$\dot{Q}_k \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_k}, \quad Q_k \to \hat{Q}_k$$

This substitution transforms the Hamiltonian to:

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial Q_k^2} + \frac{\omega(k)^2}{2} \hat{Q}_k^2$$

The definitions for the creation and annihilation operators are given by:

$$a_k^{\pm} = \sqrt{\frac{\omega(k)}{2\hbar}}\hat{Q}_k \pm \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(k)}}\frac{\partial}{\partial Q_k}$$

The expression for the product of the creation and annihilation operators, and its reformulation into the Hamiltonian, is:

$$a_k^+ a_k^- = \frac{\hbar}{2\omega(k)}\frac{\partial^2}{\partial Q_k^2} + \frac{\omega(k)}{2\hbar}\hat{Q}_k^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial Q_k}, \hat{Q}_k\right]$$

$$\Rightarrow (a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2})\hbar\omega(k) = \hat{H}$$

Für den elektrischen Feldoperator $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r})$, basierend auf Gleichung S7.4, erhalten wir:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_k \hat{A}_k(t)\sin(kx)\hat{\mathbf{e}}_y = \sum_k \lambda_k^{-1}\hat{Q}_k(t)\sin(kx)\hat{\mathbf{e}}_y$$

wobei $\hat{Q}_k(t)$ durch die Erzeuger und Vernichter ausgedrückt wird:

$$\hat{Q}_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega(k)}}(a_k^- + a_k^+)\sin(kx)$$

Einsetzen ergibt:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2L_x\varepsilon_0}}(a_k^- + a_k^+)\sin(kx)\hat{\mathbf{e}}_y$$

Frage (d):

Bestimme die Koeffizienten γ_k^+ und γ_k^- für die Interaktions-Hamiltonfunktion des Zweiniveausystems im elektromagnetischen Feld.

Lösung (d):
Die Interaktions-Hamiltonfunktion $\hat{H}_I$ ist gegeben durch:

$$\hat{H}_I = \sum_k (-e)\sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{\varepsilon_0 L_x}}\left(a_k^+ + a_k^-\right)\hat{e}_y \cdot \left(\sum_{\sigma,\sigma'}\langle\psi_\sigma|\vec{r}|\psi_{\sigma'}\rangle|\psi_{\sigma'}\rangle\langle\psi_\sigma|\right),$$

was umgeschrieben werden kann, da σ und σ' jeweils nur über ground state g und excited state e summieren. Daher sind die elemente wo $\sigma = \sigma'$ null.

$$\hat{H}_I = \sum_k (-e)\sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\varepsilon_0 L_x}}\left(a_k^+ + a_k^-\right)\hat{e}_y \cdot \left(\langle\psi_g|\hat{r}|\psi_e\rangle\sigma^- + \langle\psi_e|\hat{r}|\psi_g\rangle\sigma^+\right)$$

wobei $\omega(k)$ die Frequenz der k-ten Mode ist und $\hat{e}_y$ die Richtung des elektrischen Feldes entlang der y-Achse angibt.

Die Koeffizienten γ_k^+ und γ_k^- lassen sich nun durch Vergleich mit der Hamiltonian in der Angabe ableiten. Sie sind durch die folgende Ausdrücke gegeben:

$$\gamma_k^+ = -e\sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\varepsilon_0 L_x}}\langle\psi_g|\hat{r}|\psi_e\rangle\sin(kx),$$

$$\gamma_k^- = -e\sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\varepsilon_0 L_x}}\langle\psi_e|\hat{r}|\psi_g\rangle\sin(kx).$$

Diese Koeffizienten stellen die Kopplungsstärken zwischen den atomaren Übergängen und den Moden des elektromagnetischen Feldes dar. $\sigma^+ = |\psi_e\rangle\langle\psi_g|$ und $\sigma^- = |\psi_g\rangle\langle\psi_e|$ sind die Auf- und Absteigeoperatoren, die die Übergänge zwischen den beiden Zuständen beschreiben.

Frage (e):

Unter der Annahme, dass $\hbar\omega(k_1) = \epsilon_e$, bestimme die Zeitentwicklung von $c_g(t)$ und $c_e(t)$ und interpretiere die Ergebnisse.

Lösung (e):

Unter der Annahme, dass die Resonanzbedingung $\hbar\omega(k_1) = \epsilon_e$ erfüllt ist, betrachten wir die Zeitentwicklung der Koeffizienten $c_g(t)$ und $c_e(t)$ im Kontext des atomaren Zweiniveausystems und seiner Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen Feld. Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ für das Gesamtsystem ist gegeben durch:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(k)(a_k^{\pm}a_k + \frac{1}{2}) + \epsilon_e|\psi_e\rangle\langle\psi_e| + \sum_{\sigma,\sigma'}|\psi_\sigma\rangle\langle\psi_\sigma|\hat{H}|\psi_{\sigma'}\rangle\langle\psi_{\sigma'}|.$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen für die Entwicklung dieser Koeffizienten sind:

$$i\hbar\dot{c}_g = \langle\psi_g|\langle 0|a_{k_1}^- \hat{H}|\psi_g\rangle a_{k_1}^+|0\rangle c_g + \langle\psi_g|\langle 0|a_{k_1}^- \hat{H}|\psi_e\rangle|0\rangle c_e,$$
$$i\hbar\dot{c}_e = \langle\psi_e|\langle 0|\hat{H}|\psi_g\rangle a_{k_1}^+|0\rangle c_g + \langle\psi_e|\hat{H}|\psi_e\rangle|0\rangle c_e.$$

Diese Gleichungen können durch die Matrixform

$$\begin{bmatrix}\dot{c}_g\\ \dot{c}_e\end{bmatrix} = -\frac{i}{\hbar}\begin{bmatrix}\alpha_\omega & \gamma^-\\ \gamma^+ & \hbar\omega\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_g\\ c_e\end{bmatrix}$$

vereinfacht werden, wobei α_ω und $\hbar\omega$ die Energiebeiträge und γ^+, γ^- die Kopplungsterme sind.

Um die dynamische Entwicklung weiter zu vereinfachen, führen wir neue Koeffizienten ein:

$$a_g = e^{\frac{i\hbar\omega t}{\hbar}}c_g, \quad a_e = e^{\frac{i\hbar\omega t}{\hbar}}c_e,$$

wobei sich die Gleichungen für a_g und a_e reduzieren zu:

$$\dot{a}_g + a_g(-i\omega) = -i\omega a_g + \gamma^- a_e\left(\frac{i}{k}\right), \quad \dot{a}_e + a_e(-i\omega) = -i\omega a_e - \frac{i}{\hbar}\gamma^+ a_g.$$

Durch diese Transformation erhalten wir eine harmonische Oszillation zwischen den Zuständen, beschrieben durch:

$$a_g(t) = a_g(0)\cos\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right) + a_e(0)\sin\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right),$$
$$a_e(t) = a_e(0)\cos\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right) - a_g(0)\sin\left(\frac{\gamma}{\hbar}t\right).$$

S8 Quantum Bomb Tester

12 Punkte

(a) Scenario Without Bombs

Using two 50/50 beam splitters, a photon entering the interferometer in state $|0\rangle$ undergoes transformations such that:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = iX,$$

and thus,

$$B^2|0\rangle = iX|0\rangle \equiv |1\rangle.$$

The output is invariably detected at D_1, demonstrating constructive interference towards $|1\rangle$ and destructive towards $|0\rangle$.

(b) Scenario With Bombs

If a bomb is present, it acts as a quantum measurement device, altering the photon's pathway probabilities:

$$\begin{aligned} P_{\text{boom}} &= \frac{1}{2}, \text{ leading to an explosion,} \\ P_{D_0} &= \frac{1}{4}, \text{ photon detected at } D_0 \text{ without explosion,} \\ P_{D_1} &= \frac{1}{4}, \text{ photon detected at } D_1 \text{ with uncertainty.} \end{aligned}$$

Detection at D_0 confirms the presence of a bomb without triggering it, necessitating experiment repetition when D_1 is detected.

(c) Implications of Photon Detection at D_0 and D_1

If we measure a photon at D_0, we know for certain that:

- the bomb did not explode since we detect the photon;
- the bomb must be in the room because otherwise the photon would be measured at D_1.

Observing a photon at D_0 thus allows us to detect the bomb without exploding it!

On the other hand, measuring a photon at D_1 can happen in both the cases of no bombs and with bombs. Hence, if we measure a photon at D_1, we are uncertain about whether there is a bomb and we will repeat our experiment.

The overall scheme if there is a bomb is given by:

$$\begin{cases} P_{\text{boom}} = \frac{1}{2} & \text{BOOM, terminate} \\ P_{\text{idle}} = \frac{1}{2} & \text{bomb idle} \\ P_{D_0} = \frac{1}{4} & \text{measure } |0\rangle \to \text{bomb detected, terminate.} \\ P_{D_1} = \frac{1}{4} & \text{measure } |1\rangle \to \text{uncertain, repeat.} \end{cases}$$

At each repeat we have $P_{\text{boom}} = \frac{1}{2}$ probability of setting off the bomb and $P_{D_0} = \frac{1}{4}$ probability of detecting the bomb.

In the limit of infinity trials, we will terminate in one of the two outcomes above. The probability of the two terminating options is determined by their relative probability. Hence, the probability of the bomb being successfully detected if it exists is:

$$\frac{P_{D_0}}{P_{\text{boom}} + P_{D_0}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

On average, two out of three bombs will explode and one will be detected successfully.

If the room is empty, we always detect the photon at D_1 and the scheme does not terminate. The probability for the detection of k successive photons at D_1 in the presence of a bomb is $(\frac{1}{4})^k$. For sufficiently large k we can thus conclude that it is highly unlikely to have a bomb in the room and terminate the iteration.

(d) Advanced Beam Splitter Configurations

Can we do any better with beam splitters beyond the 50/50 type? More general beam-splitters will have a transmission probability T and a reflection probability $R = 1 - T$ if we measure right after the beam splitter. The matrix form (gate form) of such a general beam splitter is given in Sec. 3.2 of the lecture notes as:

$$B = \sqrt{T}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) + i\sqrt{R}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) = \begin{pmatrix} \sqrt{T} & i\sqrt{R} \\ i\sqrt{R} & \sqrt{T} \end{pmatrix}$$

Now we will replace the two 50/50 beam-splitters in our set-up with one that has $T = t$ and another that has $T = r = 1 - t$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & i\sqrt{r} \\ i\sqrt{r} & \sqrt{t} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & i\sqrt{t} \\ i\sqrt{t} & \sqrt{r} \end{pmatrix}$$

In such a case, following similar arguments as before, we then have:

No bombs:

With input state $|0\rangle$, our circuit is simply

$$B_1 B_2 |0\rangle = iX|0\rangle \equiv |1\rangle$$

Hence, we will measure $|1\rangle$ with 100% probability.

With bombs:

The bomb acts as a detector that essentially performs a measurement after the first beam-splitter. Overall, we have:

$$\begin{cases} P_{\text{boom}} = t, & \text{BOOM, terminate} \\ P_{\text{idle}} = r, & \text{bomb idle} \\ P_{D_0} = rt, & \text{measure } |0\rangle \rightarrow \text{bomb detected, terminate} \\ P_{D_1} = r^2, & \text{measure } |1\rangle \rightarrow \text{uncertain, repeat} \end{cases}$$

At each repeat, we have $P_{\text{boom}} = t$ probability of setting off the bomb and $P_{D_0} = rt$ probability of detecting the bomb. In the limit of infinity trials, we will terminate in one of the two outcomes above. The probability of the two terminating options is determined by their relative probability. Hence, the probability of terminating in the bomb being successfully detected is:

$$\frac{P_{D_0}}{P_{\text{boom}} + P_{D_0}} = \frac{rt}{t + rt} = \frac{r}{1 + r}$$

To maximize the probability of detecting the bomb, we have $r \to 1$, and $\frac{r}{1+r} \to \frac{1}{2}$. Note that, this also means the probability of termination in each run is infinitesimal and we require infinite trials to terminate, i.e., most of the measurement will end in the 'useless' $|1\rangle$.

(e) Utilizing the Quantum Zeno Effect for Improved Detection

We will now employ a series of beam splitters, each characterized by the matrix:

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1\cos\theta + iX\sin\theta = e^{i\theta X}.$$

Here, $T = \cos^2\theta$ and $R = 1 - T = \sin^2\theta$. We utilize an even number of beam splitters, N, each set with $\theta = \frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}$.

Scenario Without Bombs

In the absence of a bomb, the system behaves as follows:

$$B_N(\theta) = e^{iN\theta X} = 1\cos(N\theta) + iX\sin(N\theta),$$

where $N\theta = \frac{\pi}{2} + N\frac{\pi}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$ for some integer n, as N is even. Therefore,

$$B_N(\theta) = 1\cos(N\theta) + iX\sin(N\theta) \propto X,$$

leading the circuit to behave like an X gate, thus the photon always exits as $|1\rangle$ when input is $|0\rangle$.

Scenario With Bombs

With a bomb present, interference is destroyed, forcing the photon to potentially follow a path that includes all reflections:

$$P_{D0} = R^N = \sin^{2N}(\theta) = \sin^{2N}\left(\frac{\pi}{2N} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^{2N}\left(\frac{\pi}{2N}\right).$$

As N increases,

$$P_{D0} = \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2N}\right)^2 + O(N^{-4})\right)^{2N} \approx 1 - \frac{\pi^2}{4N} + O(N^{-2}),$$

which approaches 1 as $N \to \infty$. Thus, for large N, the system will always measure $|0\rangle$ if a bomb is present and $|1\rangle$ if not, providing a perfect distinction without causing the bomb to explode.

To sum up, the bomb is just a detector, our question turns into, can we know that whether there is a detector present without setting off the detector? The answer is yes, and the way we do this is making use of the fact that a detector will destroy interference by its mere presence even without interacting with the particle. Hence, we can map the question of whether there is a detector or not to whether we have observe a interference pattern or not. This is very much in the same spirit as the double slit experiment.

S9 Coupled Oscillator

17 Punkte *Enrico Arrigoni*, TU Graz

Consider two classical particles each with mass m, connected to each other and to two external fixed points via springs as shown in the figure (which represents the equilibrium position). The spring constants are k for the internal spring and pk for the external springs, where p is a scalar multiplier.

Frequencies of Oscillation Modes

To find the modes of oscillation, we start with the equations of motion and apply the suggested transformation to variables $X = x_1 + x_2$ and $Y = x_1 - x_2$:

Original Equations:

$$m\ddot{x}_1 = -pKx_1 - K(x_1 - x_2),$$
$$m\ddot{x}_2 = -pKx_2 + K(x_1 - x_2).$$

Substituting X and Y, and simplifying, we find:

$$m\ddot{X} = -pKX \quad \text{(Symmetric mode)},$$
$$m\ddot{Y} = -(2K + pK)Y \quad \text{(Antisymmetric mode)}.$$

Solving these equations, we derive the frequencies ω:

$$\omega_X = \sqrt{\frac{pK}{m}} \quad \text{(Frequency for } X\text{)},$$
$$\omega_Y = \sqrt{\frac{(2+p)K}{m}} \quad \text{(Frequency for } Y\text{)}.$$

Time Evolution of Coordinates

Given the initial conditions $x_1(0) = x_0$, $x_2(0) = 0$, and $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$:

$$X(0) = x_0, \quad Y(0) = x_0, \quad \dot{X}(0) = \dot{Y}(0) = 0,$$
$$X(t) = x_0 \cos(\omega_X t),$$
$$Y(t) = x_0 \cos(\omega_Y t),$$
$$x_1(t) = \frac{1}{2}(X(t) + Y(t)) = \frac{x_0}{2}(\cos(\omega_X t) + \cos(\omega_Y t)),$$
$$x_2(t) = \frac{1}{2}(X(t) - Y(t)) = \frac{x_0}{2}(\cos(\omega_X t) - \cos(\omega_Y t)).$$

9.1 Ground-State Energy and Expectation Value

(c)

Assuming a harmonic potential, the Hamiltonian for each mode is quantized:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega_X}{2} + \frac{\hbar\omega_Y}{2}$$

The ground-state energy, E_0, of non-interacting harmonic oscillators is the sum of the zero-point energies of each mode:

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_X + \frac{1}{2}\hbar\omega_Y$$

To find $\langle x_1^2 \rangle$ in the ground state, use:

$$\langle x_1^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_X} + \frac{\hbar}{2m\omega_Y}$$

9.2 Quantum Thermodynamics

The quantum mechanical system (again with $p = \frac{1}{4}$) is in equilibrium at temperature T (you can work in units where the Boltzmann constant $k_B = 1$).

(d) Internal Energy U

For a quantum harmonic oscillator, the partition function Z for a single mode with frequency ω at temperature T is given by:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}$$

This can be simplified to:

$$Z = e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\hbar\omega})^n = \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}$$

The internal energy U is then given by:

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = \hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)$$

For two modes with frequencies ω_X and ω_Y, the total internal energy U is:

$$U = \hbar\omega_X\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_X} - 1}\right) + \hbar\omega_Y\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega_Y} - 1}\right)$$

(e) High Temperature Limit and Heat Capacity C

At high temperatures ($T \to \infty$), $\beta \to 0$, and using the Taylor expansion of $e^x \approx 1 + x$:

$$\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \approx \frac{1}{\beta\hbar\omega}$$

Thus, the internal energy U approximates to:

$$U \approx \hbar\omega_X\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega_X}\right) + \hbar\omega_Y\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\beta\hbar\omega_Y}\right) = \frac{1}{\beta}(\frac{1}{\omega_X} + \frac{1}{\omega_Y})$$

The heat capacity C at constant volume is:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = k_B\left(\frac{1}{\omega_X} + \frac{1}{\omega_Y}\right)$$

9.3 n particles

We now take $p = 1$ and consider the case of an arbitrary number n of particles. We start again with the classical case.

(f) (3 Punkte) Find the eigenfrequencies in this case.

Hint, Ansatz: $x_r(t) = \mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\sin(kr)\}$, where r equals the index of the masses. You might find the following relation useful:

$$\sin(k(r \pm 1)) = \sin(kr)\cos(k) \pm \cos(kr)\sin(k)$$

Solution:

$$X_r = \mathrm{Re}\{Ae^{i\omega t}\sin(kr)\} = R\,\mathrm{Re}\{A_r e^{i\omega t}\}$$
$$\ddot{X}_r = -\omega_0^2(2x_r - x_{r+1} - x_{r-1})$$
$$-\omega^2 A_r = -\omega_0^2(2A_r - A_{r+1} - A_{r-1})$$
$$A_r = A\sin(kr)$$
$$\sin(k(r \pm 1)) = \sin(kr)\cos(k) \pm \cos(kr)\sin(k)$$
$$A_{r+1} + A_{r-1} = 2A\sin(kr)\cos(k)$$
$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2(1-\cos(k)) \qquad \Rightarrow \omega(k) = \omega_0\sqrt{2(1-\cos(k))}$$

Boundary conditions $X_0 = X_{n+1} = 0$:

$$X_0 = r \text{ fulfills} \quad X_{n+1} \text{ as } \sin(k(n+1)) = 0$$
$$\Rightarrow k = \frac{\pi p}{n+1} \qquad r = 1, 2, \ldots, n$$

9.4 Quantum Thermodynamics again

(g) (3 Punkte) Consider now again the quantum mechanical case at temperature T for $n \to \infty$.

Hint:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solution:

$$\langle E \rangle = \sum_p \left(\frac{\varepsilon_p}{e^{\beta\varepsilon_p} - 1} + \frac{1}{2}\varepsilon_p \right) \qquad \varepsilon_p = \hbar\omega(k_p)$$
$$\frac{1}{n}\sum_\rho \Rightarrow \frac{1}{n}\int \frac{n+1}{\pi}dk = \int \frac{dh}{\pi}$$
$$\langle E \rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi}\frac{\hbar\omega_n(k)}{e^{\beta\hbar\omega_n(k)} - 1} + c$$

For $\beta \to T$ only small ω contribute:

$$W(\pi) = \omega_0\sqrt{2(1-\cos(A))} \approx \omega_0\sqrt{\pi(1 - 1 + \frac{\pi^2}{2})}$$
$$\approx \omega_0 \cdot k$$

$$\langle E\rangle = \int_0^\infty \frac{dk}{\pi}\frac{\hbar\omega_n k}{e^{\beta\hbar\omega_0 k}-1} \qquad \beta\hbar\omega_0 h = x$$

$$\frac{1}{\beta^3\hbar\omega_0\pi}\int_0^\infty \frac{dx\,x}{e^x-1} = \frac{\pi}{6}\frac{(k_BT)^2}{\hbar\omega_0}$$

$$\Rightarrow C_V = \frac{\pi}{3}\frac{k_B^2 T}{\hbar\omega_0}$$