

## Medida de dos observables que conmutan.

Con este apartado vamos a comenzar el análisis de lo que ocurre cuando medimos dos observables en lugar de uno solo. En primer lugar estudiaremos el caso en que los dos observables conmutan.

Supongamos dos observables  $A$  y  $B$  que conmutan, es decir que  $[A, B] = 0$ . En este caso podemos encontrar una base de autovectores comunes a los dos operadores. Si este par de operadores no forman un conjunto completo de observables que conmutan sus autovalores no son suficientes para identificar unívocamente los vectores de la base, de modo que necesitaremos otro índice aparte de sus autovalores. Sea el conjunto de vectores  $\{|a_i, b_j, k\rangle\}$  una base de autovectores comunes a los dos observables, de modo que

$$\begin{aligned} A |a_i, b_j, k\rangle &= a_i |a_i, b_j, k\rangle \\ B |a_i, b_j, k\rangle &= b_j |a_i, b_j, k\rangle \end{aligned}$$

Vamos a ver qué ocurre cuando realizamos una medida sucesiva de los dos observables. Podemos realizar el proceso de medida de dos formas: primero medir  $A$  y después  $B$ , o bien primero medir  $B$  y después  $A$ . Vamos a considerar en primer lugar el caso en que primero medimos el observable  $A$ .

Supongamos que inicialmente la partícula se encuentra en el estado  $|\psi\rangle$  y que realizamos una medida del observable  $A$ . La probabilidad de obtener como resultado de la medida el valor  $a_i$  viene dada por la siguiente expresión:

$$\mathcal{P}(a_i) = \langle \psi | P_{a_i} | \psi \rangle = \sum_j \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2$$

Si obtenemos como resultado de la medida de  $A$  el valor  $a_i$  el estado de la partícula después de la medida viene dado por el siguiente ket

$$|\psi'\rangle = \frac{\sum_j \sum_k \langle a_i, b_j, k | \psi \rangle |a_i, b_j, k\rangle}{\sqrt{\sum_j \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}}$$

Si a continuación medimos el observable  $B$  la probabilidad de obtener como resultado de la medida el valor  $b_j$  viene dado por la siguiente expresión:

$$\mathcal{P}(a_i | b_j) = \langle \psi' | P_{b_j} | \psi' \rangle = \frac{\sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}{\sum_j \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}$$

Esta probabilidad se denomina probabilidad condicionada y es la probabilidad de que una vez que hemos obtenido como resultado de la medida de  $A$  el valor  $a_i$  obtengamos a continuación el valor  $b_j$  al medir  $B$ . Lógicamente estamos suponiendo que las dos medidas se realizan consecutivamente en un tiempo corto, de modo que no demos tiempo a la partícula para evolucionar entre las dos medidas. Una vez que hemos realizado la medida

de  $B$  el estado de la partícula será:

$$|\psi''\rangle = \frac{\sum_k \langle a_i, b_j, k | \psi \rangle |a_i, b_j, k\rangle}{\sqrt{\sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}}$$

Lo importante es destacar que el estado de la partícula es un autovector de  $A$  de valor  $a_i$  y un autovector de  $B$  de autovalor  $b_j$ , de modo que si a continuación volvemos a medir el valor de  $A$  volveremos a obtener el valor  $a_i$ . Vamos a calcular ahora la probabilidad de que al medir el observable  $A$  y a continuación el  $B$  obtengamos los valores  $a_i$  y  $b_j$ . Esta probabilidad será la probabilidad de obtener el valor  $a_i$  en la medida de  $A$  multiplicada por la probabilidad condicionada de que si hemos obtenido en la medida de  $A$  el valor  $a_i$  obtengamos en la medida de  $B$  el valor  $b_j$ . Es decir que la probabilidad que buscamos es:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a_i, b_j) &= \mathcal{P}(a_i) \mathcal{P}(a_i | b_j) = \sum_j \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2 \frac{\sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}{\sum_j \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2} = \\ &= \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Que es el resultado que cabría esperar. Vamos a analizar la segunda forma de medir, es decir, en primer lugar mediremos el observable  $B$  y en segundo lugar el observable  $A$ . Si la partícula se encuentra inicialmente en el estado  $|\psi\rangle$  la probabilidad de que al medir  $B$  obtengamos como resultado el valor  $b_j$  será:

$$\mathcal{P}(b_j) = \langle \psi | P_{b_j} | \psi \rangle = \sum_i \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2$$

Si hemos obtenido como resultado de la medida el valor  $b_j$  el estado de la partícula después de la medida de  $B$  será:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sum_i \sum_k \langle a_i, b_j, k | \psi \rangle |a_i, b_j, k\rangle}{\sqrt{\sum_i \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}}$$

Si ahora medimos el observable  $A$  la probabilidad de obtener el valor  $a_i$  viene dada por la expresión:

$$\mathcal{P}(b_j | a_i) = \langle \psi' | P_{a_i} | \psi' \rangle = \frac{\sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}{\sum_i \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}$$

y el estado de la partícula después de haber medido el observable  $A$ , si hemos obtenido como resultado el valor  $a_i$ , será:

$$|\psi'''\rangle = \frac{\sum_k \langle a_i, b_j, k | \psi \rangle |a_i, b_j, k\rangle}{\sqrt{\sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}}$$

Después de la segunda medida el estado de la partícula es un autovector de  $A$  y también un autovector de  $B$ , de modo que si volvemos a medir el observable  $B$  obtendremos de nuevo como resultado el valor  $b_j$ . El estado de la partícula si hemos obtenido como resultado de las medidas los valores  $b_j$  y  $a_i$  coincide con el resultado del experimento anterior en el que medíamos primero  $A$  y después  $B$ . Podemos calcular ahora la probabilidad de que al realizar medidas consecutivas de los observables  $B$  y  $A$  obtengamos como resultado los valores  $b_j$  y  $a_i$ . Esta probabilidad será el producto de la probabilidad de obtener como resultado en la medida de  $B$  el valor  $b_j$  por la probabilidad condicionada de que si hemos obtenido como resultado de la medida de  $B$  el valor  $b_j$  obtengamos como resultado de la medida de  $A$  el valor  $a_i$ . Es decir, que la probabilidad que buscamos es:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(b_j, a_i) &= \mathcal{P}(b_j)\mathcal{P}(a_i|b_j) = \sum_i \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2 \frac{\sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2}{\sum_i \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2} = \\ &= \sum_k |\langle a_i, b_j, k | \psi \rangle|^2 \end{aligned}$$

Es decir, que obtenemos el mismo resultado que si medimos primero  $A$  y obtenemos como resultado  $a_i$  y después medimos el observable  $B$  obteniendo como resultado el valor  $b_j$ . Dos observables que conmutan se dice que son compatibles, ya que la probabilidades de obtener un resultado concreto en la medida de los dos observables no depende del orden en que se midan. De hecho los dos observables se pueden medir simultáneamente. Cuando medimos uno de los dos observables y a continuación el otro, en la segunda medida no perdemos la información de la primera, sino que por el contrario obtendremos mayor información sobre el estado de la partícula después de la segunda medida. Cuando queremos fijar el estado de un sistema lo que tenemos que hacer es medir sucesivamente observables que conmuten entre si y este proceso se denomina preparación de un estado.

Supongamos que tenemos un observable  $A$  de modo que el solo forma un conjunto completo de observables que conmutan. Según vimos en un tema anterior esto significa que los autovalores de  $A$  no son degenerados. Vamos a suponer por ejemplo que el espectro de  $A$  es discreto, formado por los valores  $a_i$ . Si el conjunto de vectores  $\{|a_i\rangle\}$  son los autovectores de  $A$  de autovalor  $a_i$  formarán una base si  $A$  es un CCOC. Si inicialmente no conocemos el estado de la partícula y medimos el observable  $A$  y obtenemos como resultado el valor  $a_i$ , después de la medida el estado será el vector  $|a_i\rangle$ . Por tanto, después de la medida conocemos perfectamente el estado de la partícula y se dice que el estado está preparado, en el sentido en que es perfectamente conocido. Ahora bien, si  $A$  no es un CCOC quiere decir que sus autovalores son degenerados. Si al medir  $A$  obtenemos un autovalor degenerado no conoceremos el estado de la partícula. Lo único que sabremos es que es una superposición lineal de los autovectores de  $A$  de autovalor  $a_i$ . Supongamos que en este caso encontramos otro observable  $B$  que conmuta con  $A$  y de modo que  $A$  y  $B$  forman un CCOC. Esto quiere decir que los autovalores de  $A$  y de  $B$  son suficientes para etiquetar los vectores de una base de autovectores comunes a  $A$  y a  $B$ . Es decir, tendremos una base de vectores de la forma  $\{|a_i, b_j\rangle\}$ . Si inicialmente no conocemos el estado de la partícula y medimos los observables  $A$  y  $B$  obteniendo como resultado los valores  $a_i$  y  $b_j$ , después de la medida el estado de la partícula será el vector  $|a_i, b_j\rangle$ , es decir, que el estado

de la partícula queda perfectamente determinado al medir los dos observables. Si por el contrario  $A$  y  $B$  no forman un CCOC la medida de estos dos observables no determina perfectamente el estado de la partícula, lo único que sabremos es que si hemos obtenido como resultado los valores  $a_i$  y  $b_j$ , el estado de la partícula será una superposición lineal de los autovectores comunes a  $A$  y a  $B$  de autovalores  $a_i$  y  $b_j$ . En este caso, puede ser que encontremos otro operador  $C$  de modo que los operadores  $A$ ,  $B$  y  $C$  formen un CCOC y así sucesivamente. En conclusión, un conjunto completo de observables que conmuta sirve no sólo para etiquetar los vectores de una base sino también para preparar el estado de una partícula, de modo que la medida sucesiva de los observables de un CCOC nos permite preparar el estado de la partícula.