El límite clásico del oscilador armónico.

Anteriormente hemos visto que los estados estacionarios no tienen ningún análogo clásico ya que en dichos estados el valor medio de cualquier observable no varía con el tiempo. Por otro lado, en la descripción clásica la posición y el momento siempre varían con el tiempo. Sin embargo, en este apartado vamos a ver que para valores grandes de la energía podemos hacer una analogía entre la densidad de probabilidad cuántica y la clásica.

Para valores grandes del número cuántico n la energía se puede considerar como una variable continua en lugar de discreta. De hecho, para un oscilador clásico la energía es una variable continua. Esto se debe a que el incremento de energía de un estado a otro, que viene dado por $\hbar\omega$, se hace pequeño en comparación con la propia energía del oscilador en el caso $n \gg 1$. Por tanto, en este caso debemos poder interpretar los resultados de la mecánica cuántica a partir de la mecánica clásica.

La densidad de probabilidad de encontrar a la partícula se puede calcular a partir de la función de onda. Para el estado estacionario n esta densidad de probabilidad viene dada por la expresión:

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} \frac{1}{2^n n!} H_n^2(y) e^{-y^2}$$

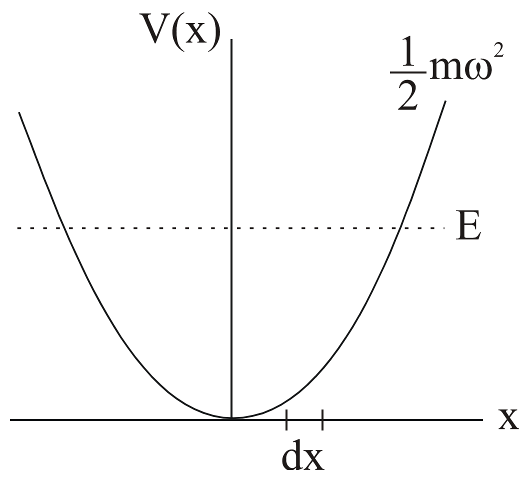
Vamos a definir una densidad de probabilidad adimensional para eliminar las constantes que aparecen al principio, de modo que

$$\bar{\rho}_n(x) = \rho(x)\sqrt{\frac{\pi\hbar}{m\omega}} = \frac{1}{2^n n!} H_n^2(y) e^{-y^2}$$

Vamos a ver cómo podemos comparar esta densidad de probabilidad con la desrcipción clásica. De acuerdo con la mecánica clásica la partícula oscila continuamente entre los puntos de retorno. Si queremos realizar una medida de la posición de la partícula será más probable encontrarla en los puntos en los que la partícula va más lenta, ya que es donde la partícula pasa mayor tiempo. Por tanto la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula será inversamente proporcional a la velocidad de la partícula:

$$\rho_{\mathrm{cl}}(x) = \frac{\omega}{\pi\,|v(x)|}$$

Podemos llegar a esta misma ecuación mediante el siguiente razonamiento. Vamos a considerar un dx tal como se muestra en la siguiente figura.



La partícula tarda un tiempo dt en atravesar ese pequeño intervalo espacial. A lo largo de un periodo completo T, la partícula pasa un tiempo $2dt$ en el intervalo dx, ya que recorre el intervalo dos veces (la ida y la vuelta). Por tanto, la probabilidad de encontrar a la partícula en el intervalo dx será (casos favorables entre casos posibles):

$$\rho_{\mathrm{cl}}(x)dx = \frac{2dt}{T} = \frac{\omega}{\pi}dt \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_{\mathrm{cl}}(x) = \frac{\omega}{\pi}\frac{dt}{dx} = \frac{\omega}{\pi}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\omega}{\pi\,|v(x)|}$$

donde se ha tenido en cuenta que dx/dt no es una derivada sino una fracción entre dos cantidades positivas pequeñas, pero ya que dx y dt no son independientes sino que están relacionadas con la velocidad, podemos sustituir dx/dt por $|v(x)|$.

La solución general del movimiento armónico simple en mecánica clásica es:

$$x = a\sin(\omega t + \alpha)$$

entonces

$$|v(x)| = a\omega\,|\cos(\omega t + \alpha)| = a\omega\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \alpha)} = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$$

Por tanto, la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula viene dada por:

$$\rho_{\mathrm{cl}}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}$$

La amplitud del movimiento es una función de la energía, ya que $E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$. Vamos a escribir por tanto a en función de la energía en la ecuación anterior:

$$\rho_{\mathrm{cl}}(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}} = \frac{1}{\pi\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{\frac{2E}{\hbar\omega} - y^2}} = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2E}{\hbar\omega} - y^2}}$$

Por último, la densidad de probabilidad adimensional clásica vendrá dada por la expresión:

$$\bar{\rho}_{\mathrm{cl}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2E}{\hbar\omega} - y^2}}$$

Para comparan esta expresión con la densidad de probabilidad cuántica si la partícula se encuentra en el estado n,vamos a sustituir la energía de la partícula por su valor en dicho estado:

$$\bar{\rho}_{n,\mathrm{cl}}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{2n+1-y^2}}$$

En la siguiente figura podemos ver la densidad de probabilidad cuántica comparada con la que se obtiene de la expresión anterior para el caso particular $n = 20$. Como podemos apreciar, si tomamos el valor medio de las oscilaciones que presenta la densidad de probabilidad cuántica se obtiene un resultado muy similar al que predice la teoría clásica. Podemos concluir, por tanto, que para valores grandes de la energía de la partícula en un estado estacionario, el valor medio de la densidad de probabilidad de encontrar a la partícula es inversamente proporcional a la velocidad clásica de la partícula. Este resultado lo utilizaremos en el siguiente tema.