# Problema de autovalores del momento angular.

En este apartado vamos a resolver el problema de autovalores del momento angular. En particular, vamos a ver cuáles son los posibles valores que pueden tomar las componentes del momento angular y el módulo al cuadrado del momento angular.

Podemos, en principio, diagonalizar cualquiera de las componentes del momento angular, sin embargo, si utilizamos las coordenadas esféricas el operador más sencillo es $\hat{L}_z$, de modo que vamos a buscar los autovalores de $\hat{L}_z$. Una vez que los encontremos, sabemos que los autovalores de $\hat{L}_z$ serán también los autovalores de las otras dos componentes del momento angular, ya que el espacio es isótropo. El operador $\hat{L}_z$ en coordenadas esféricas es:

$$\hat{L}_z \psi(\mathbf{r}) = -i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \varphi}$$

Vamos a resolver el problema de autovalores de $\hat{L}_z$ en la representación coordenadas, es decir, que vamos a encontrar las funciones que satisfacen la siguiente condición:

$$\hat{L}_z \psi(\mathbf{r}) = -i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r})}{\partial \varphi} = c\psi(\mathbf{r})$$

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$\psi(\mathbf{r}) = f\,(r,\theta)\, e^{ic\varphi/\hbar}$$

donde $f(r,\theta)$ es una función arbitraria. Para que la función $\psi(\mathbf{r})$ no sea una función multivaluada de $x$, $y$ y $z$, dicha función debe ser una función periódica de $\varphi$ de modo que $\psi(r,\theta,\varphi) = \psi(r,\theta,\varphi+2\pi)$. De modo que:

$$f\,(r,\theta)\, e^{ic\varphi/\hbar} = f\,(r,\theta)\, e^{ic(\varphi+2\pi)/\hbar} = f\,(r,\theta)\, e^{ic\varphi/\hbar} e^{i2\pi c/\hbar}$$

por tanto, se debe verificar la condición $e^{i2\pi c/\hbar} = 1$. La única forma de verificar la condición anterior es que $c$ sea de la forma $c = m\hbar$, donde $m$ es un número entero. Por tanto, los autovalores de $\hat{L}_z$ son los números:

$$m\hbar$$

y las autofunciones

$$\psi(\mathbf{r}) = f\,(r,\theta)\, e^{im\varphi}$$

(con autovalor $m\hbar$). El espectro de $\hat{L}_z$ es discreto. Los autovalores del operador $\hat{L}_z$ son infinitamente degenerados ya que la función $f(r,\theta)$ queda indeterminada. Como podemos ver, los autovalores de $\hat{L}_z$ son números reales, debido a que $\hat{L}_z$ es hermítico. Por otro lado, cualquier función del espacio de estados se puede desarrollar en serie de las autofunciones de $\hat{L}_z$ de modo que dicho operador es un observable. Por último, decir que los autovalores de los operadores $\hat{L}_x$ y $\hat{L}_y$ también serán de la forma $m\hbar$ con $m$ un número entero.

Vamos a ver ahora cuáles son los autovalores del módulo al cuadrado del momento angular. Como $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ conmutan, podemos encontrar una base de autovectores comunes a los dos operadores. Sea el ket $|m\rangle$ un autovector normalizado común a los dos operadores, de autovalor $L^2$ y $m\hbar$, de modo que:

$$\hat{L}^2 \,|m\rangle = L^2 \,|m\rangle \qquad \text{y} \qquad \hat{L}_z \,|m\rangle = m\hbar \,|m\rangle$$

En primer lugar, podemos ver que los vectores $\hat{L}_x |m\rangle$, $\hat{L}_y |m\rangle$ y $\hat{L}_z |m\rangle$ son también autovectores de $\hat{L}^2$ con el mismo autovalor $L^2$:

$$\hat{L}^2 \left(\hat{L}_x |m\rangle\right) = \hat{L}_x \hat{L}^2 |m\rangle = L^2 \left(\hat{L}_x |m\rangle\right)$$

y del mismo modo para $\hat{L}_y$ y $\hat{L}_z$. Como consecuencia los kets $\hat{L}_+ |m\rangle$ y $\hat{L}_- |m\rangle$ son también autovectores de $\hat{L}^2$ y con el mismo autovalor $L^2$. Vamos a ver ahora cómo afectan los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$ al ket $|m\rangle$. Vamos a ver que los vectores $\hat{L}_+ |m\rangle$ y $\hat{L}_- |m\rangle$ son autovectores de $\hat{L}_z$ pero con autovalor $(m+1)\,\hbar$ y $(m-1)\,\hbar$ respectivamente. Para demostrarlo utilizaremos las relaciones de conmutación $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_+\right] = \hbar L_+$ y $\left[\hat{L}_z, \hat{L}_-\right] = -\hbar \hat{L}_-$:

$$\hat{L}_z \left(\hat{L}_+ |m\rangle\right) = \left(\hat{L}_+ \hat{L}_z + \hbar \hat{L}_+\right) |m\rangle = \left(\hat{L}_+ m\hbar + \hbar \hat{L}_+\right) |m\rangle = (m+1)\,\hbar \left(\hat{L}_+ |m\rangle\right)$$

y

$$\hat{L}_z \left(\hat{L}_- |m\rangle\right) = \left(\hat{L}_- \hat{L}_z - \hbar \hat{L}_-\right) |m\rangle = \left(\hat{L}_- m\hbar - \hbar \hat{L}_-\right) |m\rangle = (m-1)\,\hbar \left(\hat{L}_- |m\rangle\right)$$

De modo que aplicando sucesivamente el operador $\hat{L}_+$ obtenemos autovectores de $\hat{L}_z$ con mayor autovalor (cada vez que lo aplicamos el autovalor de $\hat{L}_z$ aumenta en una unidad de $\hbar$) que siguen siendo autovectores de $\hat{L}^2$ del mismo autovalor $L^2$. Del mismo modo, aplicando sucesivamente el operador $\hat{L}_-$ obtenemos autovectores de $\hat{L}_z$ de menor autovalor, pero que siguen siendo autovectores de $\hat{L}^2$ del mismo autovalor.

Vamos a ver ahora que el autovalor $m\hbar$ debe cumplir la condición $|m\hbar| \leq L$, lo cual es lógico, ya que una componente de un vector (en nuestro caso la $z$) nunca puede ser mayor que el módulo del vector. El ket $|m\rangle$ es un autovector común a $\hat{L}^2$ y a $\hat{L}_z$, vamos a calcular el valor medio del operador $\hat{L}^2$ sobre este estado:

$$\left\langle \hat{L}^2 \right\rangle_m = \left\langle m \left| \hat{L}^2 \right| m \right\rangle = L^2 = \left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle_m + \left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle_m + \left\langle \hat{L}_z^2 \right\rangle_m = \left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle_m + \left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle_m + m^2\hbar^2$$

Los términos $\left\langle \hat{L}_x^2 \right\rangle_m$ y $\left\langle \hat{L}_y^2 \right\rangle_m$ son números reales positivos, de modo que:

$$L^2 \geq m^2\hbar^2 \qquad \text{o bien} \qquad |m\hbar| \leq L$$

Según hemos visto, aplicando los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$ podemos obtener autovectores de $\hat{L}_z$ con autovalores arbitrariamente altos (tanto positivos como negativos). La única forma que se verifique la condición anterior es que existan autovalores de $\hat{L}_z$ que notaremos como $m_{\min}$ y $m_{\max}$ de modo que:

$$\hat{L}_+ |m_{\max}\rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad \hat{L}_- |m_{\min}\rangle = 0$$

y tales que:

$$m_{\max}\hbar \leq L \qquad \text{y} \qquad m_{\min}\hbar \geq -L$$

Vamos a encontrar cuáles son los valores $m_{\min}$ y $m_{\max}$. Aplicamos el operador $\hat{L}^2$ a los vectores $|m_{\min}\rangle$ y $|m_{\max}\rangle$, que son autovectores de $\hat{L}^2$ con autovalor $L^2$:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |m_{\max}\rangle &= \left(\hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z\right) |m_{\max}\rangle = \left(m_{\max}^2 \hbar^2 + m_{\max}\hbar^2\right) |m_{\max}\rangle = \\ &= m_{\max}\left(m_{\max}+1\right)\hbar^2 |m_{\max}\rangle \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^2 |m_{\min}\rangle &= \left(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z\right)|m_{\min}\rangle = \left(m_{\min}^2\hbar^2 - m_{\min}\hbar^2\right)|m_{\min}\rangle = \\
&= m_{\min}\left(m_{\min} - 1\right)\hbar^2 |m_{\min}\rangle
\end{aligned}
$$

Estos dos valores tienen que ser iguales a $L^2$ de modo que:

$$
m_{\max}\left(m_{\max} + 1\right) = m_{\min}\left(m_{\min} - 1\right)
$$

De esta ecuación podemos ver qué relación existe entre estos dos números:

$$
m_{\max}^2 + m_{\max} - m_{\min}\left(m_{\min} - 1\right) = 0
$$

resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$
\begin{aligned}
m_{\max} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4m_{\min}\left(m_{\min} - 1\right)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4m_{\min}^2 - 4m_{\min} + 1}}{2} = \\
&= \frac{-1 \pm \left(2m_{\min} - 1\right)}{2} = \begin{cases} m_{\min} - 1 \\ -m_{\min} \end{cases}
\end{aligned}
$$

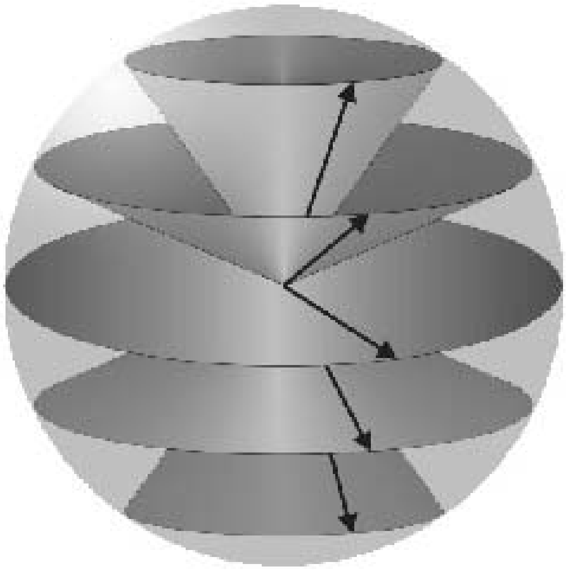
El primer resultado sería absurdo, ya que $m_{\max}$ sería menor que $m_{\min}$, de modo que la solución correcta es que $m_{\max} = -m_{\min}$. Al valor $m_{\max}$ lo notaremos por $l$. Este número $l$ puede ser cualquier número entero positivo. Podemos calcular ya el autovalor del operador $\hat{L}^2$, ya que:

$$
\hat{L}^2 |m_{\max}\rangle = m_{\max}\left(m_{\max} + 1\right)\hbar^2 |m_{\max}\rangle = l\left(l + 1\right)\hbar^2 |m_{\max}\rangle
$$

En conclusión, los autovectores comunes a $\hat{L}^2$ y a $\hat{L}_z$ quedan caracterizados por dos números cuánticos $l$ y $m$, de modo que notaremos estos autovectores comunes como $|l, m\rangle$, de modo que:

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^2 |l, m\rangle &= l\left(l + 1\right)\hbar^2 |l, m\rangle \\
\hat{L}_z |l, m\rangle &= m\hbar |l, m\rangle
\end{aligned}
$$

donde $l = 0, 1, 2, \cdots$ y $-l \leq m \leq l$, de modo que para un valor de $l$ fijo, $m$ puede tomar los valores $m = -l, -l + 1, \cdots, l - 1, l$. Para cada valor de $l$ existen $2l + 1$ posibles valores de $m$. Para un valor de $l$ fijo, podemos representar los autovectores ket comunes a $\hat{L}^2$ y a $\hat{L}_z$, $|l, m\rangle$, como se muestra en la siguiente figura. Para un ket $|l, m\rangle$, los operadores $\hat{L}^2$ y $\hat{L}_z$ tienen un valor bien determinado, mientras que los operadores $\hat{L}_x$ y $\hat{L}_y$ no, de modo que el vector momento angular se encontrará dentro de uno de los conos, dependiendo del valor de $m$ (todos los vectores que tienen un módulo fijo y componente $z$ fija generan un cono). El vector momento angular nunca puede apuntar en la dirección vertical ya que en ese caso estarían determinados simultáneamente $\hat{L}_x$, y $\hat{L}_y$ ya que sería nulos. Por ejemplo, para $l = 2$, los posibles valores que podemos obtener al medir $\hat{L}_z$ son $-2\hbar, -\hbar, 0, \hbar$ y $2\hbar$, mientras que si medimos $\hat{L}^2$ obtendremos el valor $2\left(2 + 1\right)\hbar^2 = 6\hbar^2$ (de modo que $\left|\hat{\mathbf{L}}\right| = \sqrt{6}\hbar \simeq 2.5\hbar$). En este caso, tendremos los cinco conos que se muestran en la figura, de modo que cada uno corresponde a un ket $|l, m\rangle$.



$$L^2 = \hbar^2 2\,(2+1) = 6\hbar^2$$

$$L_z = -2\hbar, -\hbar, 0, \hbar, 2\hbar$$

Si realizamos una medida del cuadrado del módulo del momento angular sólo podemos obtener los siguientes valores como resultado de la medida:

$$0, 2\hbar^2, 6\hbar^2, 12\hbar^2, 20\hbar^2, \cdots$$

Por otro lado, si medimos la componente $\hat{L}_z$ del momento angular podemos obtener como resultado:

$$0, \pm\hbar, \pm 2\hbar, \pm 3\hbar, \pm 4\hbar, \cdots$$

Por último, si medimos el cuadrado del módulo del momento angular y obtenemos como resultado el valor $l\,(l+1)\,\hbar^2$ e inmediatamente después medimos la componente $\hat{L}_z$ del momento angular sólo podemos obtener como resultado los valores:

$$-l\hbar, -(l-1)\,\hbar, \cdots, 0, \cdots (l-1)\,\hbar, l\hbar$$

Vamos a ver a continuación cómo podemos obtener para un valor fijo del número $l$ los distintos vectores $|l,m\rangle$ normalizados a partir de uno de ellos. Lógicamente lo que tenemos que hacer es aplicar los operadores $\hat{L}_+$ y $\hat{L}_-$. Vamos a partir del ket $|l,m\rangle$ normalizado. En primer lugar obtendremos el vector $|l,m+1\rangle$:

$$\hat{L}_+ \,|l,m\rangle = c_+ \,|l,m+1\rangle$$

a continuación tomamos el hermítico conjugado de esta expresión:

$$\langle l,m|\, \hat{L}_- = c_+^* \,\langle l,m+1|$$

Si proyectamos una expresión sobre la otra obtenemos:

$$\begin{aligned} \left\langle l,m \middle| \hat{L}_-\hat{L}_+ \middle| l,m \right\rangle &= |c_+|^2 = \left\langle l,m \middle| \left(\hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hbar\hat{L}_z\right) \middle| l,m \right\rangle = \\ &= l\,(l+1)\,\hbar^2 - m^2\hbar^2 - m\hbar^2 = \hbar^2\,[l\,(l+1) - m\,(m+1)] \end{aligned}$$

Esta expresión determina el módulo de la constante $c_+$. Como somos libres de escoger la fase tomaremos esta constante como real y positiva, de modo que:

$$c_+ = \hbar\sqrt{l\,(l+1) - m\,(m+1)}$$

y

$$\hat{L}_+ \left| l, m \right\rangle = \hbar \sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m+1\right)} \left| l, m+1 \right\rangle$$

De esta expresión obtenemos el vetor $\left| l, m+1 \right\rangle$ a partir del vector $\left| l, m \right\rangle$. Vamos ahora a aplicar el operador $\hat{L}_-$:

$$\hat{L}_- \left| l, m \right\rangle = c_- \left| l, m-1 \right\rangle$$

tomamos de nuevo el hermítico conjugado:

$$\left\langle l, m \right| \hat{L}_+ = c_-^* \left\langle l, m-1 \right|$$

y proyectamos una expresión sobre la otra:

$$\begin{aligned} \left\langle l, m \middle| \hat{L}_+ \hat{L}_- \middle| l, m \right\rangle &= \left| c_- \right|^2 = \left\langle l, m \middle| \left( \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z \right) \middle| l, m \right\rangle = \\ &= l\left(l+1\right)\hbar^2 - m^2\hbar^2 + m\hbar^2) = \hbar^2 \left[ l\left(l+1\right) - m\left(m-1\right) \right] \end{aligned}$$

y tomando $c_-$ real y positiva queda:

$$c_- = \hbar \sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m-1\right)}$$

Por tanto:

$$\hat{L}_- \left| l, m \right\rangle = \hbar \sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m-1\right)} \left| l, m-1 \right\rangle$$

Esta expresión nos permite obtener el vector $\left| l, m-1 \right\rangle$ a partir del vector $\left| l, m \right\rangle$. Resumiendo las dos expresiones:

$$\hat{L}_\pm \left| l, m \right\rangle = \hbar \sqrt{l\left(l+1\right) - m\left(m \pm 1\right)} \left| l, m \pm 1 \right\rangle$$