Es soll geprüft werden, ob, wenn die Ortsdichte $\Psi\overline{\Psi}$ die Normalverteilung $N(0, \sigma_x)$ besitzt, sich daraus die Heisenbergsche Unschärferelation herleiten läßt. Diese gibt eine untere Schranke für das Produkt $\sigma_x \cdot \sigma_p$ an. Beide Sigmata sind Standardabweichungen und geben das Streuverhalten von Teilchenorten und -impulsen bei vielen gleichartigen Streuversuchen an.

Um zu erreichen, dass $\Psi\overline{\Psi} = N(0, \sigma_x)$ wird Ψ mit $\Psi(x) = \sqrt{N(0, \sigma_x)} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{p_0}{\hbar}x}$ angesetzt, also dem Produkt aus der Impulseigenfunktion zum Impuls p_0 und der Wurzel aus der Normalverteilungsfunktion $N(0, \sigma_x) = \mathrm{F}(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$. Ziel ist es, aus der Wellenfunktion im Ortsraum die zugehörige Wellenfunktion im Impulsraum $\Phi(p)$ zu gewinnen gemäß der Beziehung $\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \mathrm{e}^{-i\frac{p}{\hbar}x} \mathrm{dx} = \sqrt{2\pi\hbar}\,\widehat{\Psi(\hbar x)}$. Aus dem so gewonnenen Ausdruck für $\Phi(p)$ wird ein Ausdruck für die Impulsdichte $\Phi\overline{\Phi}$ ermittelt, welcher eine Normalverteilung $N(p_{0,}\ \sigma_p)$ um den Impuls p_0 ergeben sollte.
Also los:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x\sqrt{2\pi}}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2}\sigma_x)^2}} \cdot \mathrm{e}^{i\frac{p_0}{\hbar}x} = \alpha \cdot \mathrm{f}(x) \cdot \mathrm{e}^{i\mu x}$$

Aus der Literatur (Peyerimhoff, Lesch) ist bekannt, dass für die Fouriertransformierte $\hat{\Psi}$ gilt: $\hat{\Psi}(\gamma) = \alpha \cdot \hat{\mathrm{f}}(\gamma - \mu)$.

Ebenso ist bekannt, dass $\hat{\Psi}(\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \mathrm{e}^{-i\gamma x} \mathrm{dx}$. Setze ich $\gamma = \frac{p}{\hbar}$, so gilt:

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \mathrm{e}^{-i\frac{p}{\hbar}x} \mathrm{dx} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \mathrm{e}^{-i\gamma x} \mathrm{dx} = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \hat{\Psi}(\gamma) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \alpha \cdot \hat{\mathrm{f}}(\gamma - \mu)$$

Laut (Peyerimhoff, Lesch) ist die Fouriertransformierte von $\mathrm{f}(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2(\sqrt{2}\sigma_x)^2}}$ gleich $\hat{\mathrm{f}}(\gamma) = \frac{\sqrt{2}\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\sigma_x^2\gamma^2}{2}}$, also $\hat{\mathrm{f}}(\gamma - \mu) = \frac{\sqrt{2}\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\sigma_x^2(\gamma - \mu)^2}$. Mit $\gamma = \frac{p}{\hbar}$, $\mu = \frac{p_0}{\hbar}$ erhält man

$$\Phi(p) = \frac{2\pi}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_x\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{\sqrt{2}\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\left(\frac{\sigma_x}{\hbar}\right)^2 (p - p_0)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\hbar}{2\sigma_x} \cdot \sqrt{2\pi}}} \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot \frac{(p - p_0)^2}{\left(\frac{\hbar}{2\sigma_x}\right)^2}}$$

, was eine rein reellwertige Funktion ist. Also ist $\Phi\overline{\Phi}(p) = \Phi(p)^2 = \frac{1}{\frac{\hbar}{2\sigma_x} \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(p - p_0)^2}{\left(\frac{\hbar}{2\sigma_x}\right)^2}}$ was genau die erwartete Normalverteilung $N(p_{0,}\ \sigma_p)$ um den Impuls p_0 ist. Offenbar gilt für die Standardabweichung der Impulse σ_p die Beziehung: $\sigma_p = \frac{\hbar}{2\sigma_x}$ was nur eine andere Art der Beziehung $\sigma_p \cdot \sigma_x = \frac{\hbar}{2}$ ist.