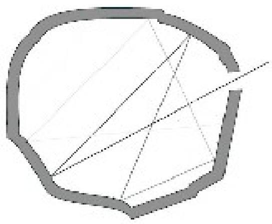
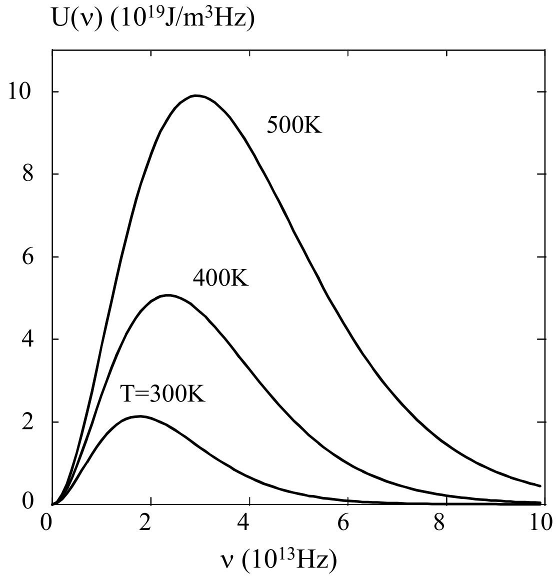
Radiación del cuerpo negro. Hipótesis de Planck.

El origen de la Física Cuántica tuvo lugar con el estudio de la radiación térmica. Todo cuerpo, por el hecho de estar a una cierta temperatura emite energía electromagnética, denominada radiación térmica y que se genera por el movimiento acelerado que sufren las partículas cargadas que constituyen el cuerpo. Cuando el cuerpo se encuentra en equilibrio térmico la radiación que emite por unidad de tiempo es igual a la que absorbe. Si la temperatura del cuerpo es de unos 300 K (temperatura ambiente) no vemos la radiación que emite, ya que ésta se encuentra en el infrarrojo y el ojo humano no la detecta. Sin embargo, si aumentamos la temperatura llega un momento en que empezamos a ver el cuerpo de color rojo (se dice que está al rojo vivo) y si se sigue aumentando se verá blanco, es decir, se emite radiación en todo el espectro visible. El espectro de la radiación térmica depende en general de la composición del cuerpo, sin embargo, existen una serie de cuerpos que emiten un espectro de radiación universal cuando están en equilibrio térmico y son los denominados cuerpos negros. Un cuerpo negro es aquel que no refleja radiación, es decir, que absorbe toda la radiación que recibe. Es complicado construir un cuerpo de estas características ya que lo normal es que se refleje parte de la radiación. En la actualidad los cuerpos más negros se consiguen recubriendo la superficie con nanotubos de carbono alineados verticalmente. Este es el caso del Vantablack con el que se consigue una absorción del 99,96%. Conesta técnica se ha llegado a alcanzar una absorción del 99,995%.

Sin embargo, existe una forma muy simple de construir algo que se comporta como un cuerpo negro y es realizando una cavidad como la que se muestra en la figura, de paredes absorbentes, de modo que la radiación que entra por el agujero difícilmente puede salir de la cavidad.



En la siguiente figura se muestra el espectro característico de un cuerpo negro a distintas temperaturas. La función que se representa $U(\nu)$ es tal que $U(\nu)d\nu$ es la energía de la radiación electromagnética por unidad de volumen cuya frecuencia está comprendida entre ν y $\nu + d\nu$.



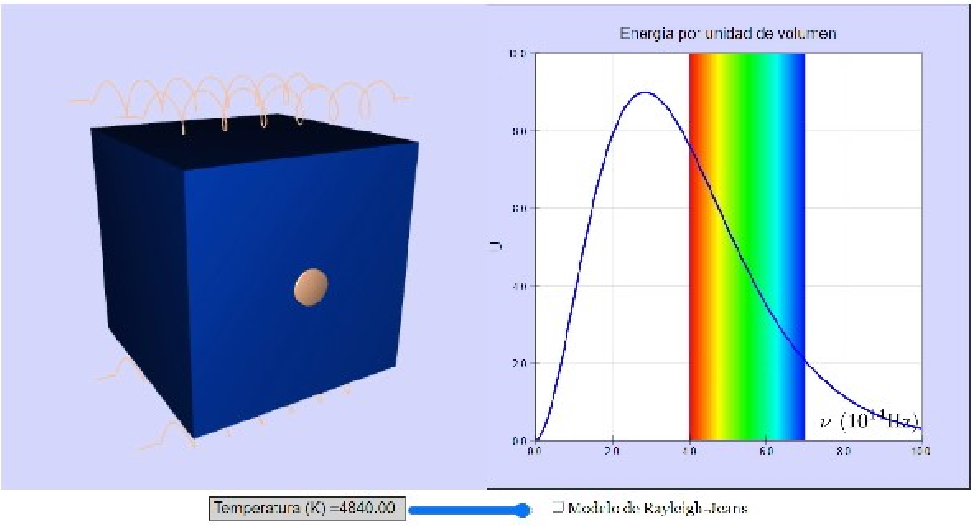
A finales del siglo XIX se conocía experimentalmente este espectro de radiación y dos leyes relacionadas con este espectro. Se sabía que la frecuencia para la cual la función $U(\nu)$ es máxima es proporcional a la temperatura, conocida como la ley del desplazamiento de Wien.

$$\nu_{\mathrm{max}} = 5.88 \cdot 10^{10} T \text{ (Hz)}$$

En la figura podemos observar que cuando aumenta la temperatura, el máximo se desplaza hacia valores de frecuencia mayores. Otra ley que se conocía consiste en que la energía total por unidad de volumen, que se obtiene integrado esta función para todas la frecuencias, es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura, conocida como la ley de Stefan-Boltzmann.

$$U_{\mathrm{T}} = \int U(\nu)\, d\nu = 7.56 \cdot 10^{-16} T^4 \text{ (J/m}^3\text{)}$$

Estos dos fenómenos se pueden observar en el applet Radiación del cuerpo negro de la página http://www.hbarra.es y que se puede ver en la siguiente figura.



Como dijimos anteriormente, el espectro de la radiación no depende de la composición del cuerpo sino únicamente de su temperatura. El explicar la radiación del cuerpo negro fue un reto para los físicos de finales del siglo XIX, ya que al no depender de la composición del cuerpo no dependerá de cómo se emite y absorbe la radiación por parte de las partículas que conforman las paredes de la cavidad y se debiera poder explicar en base al electromagnetismo y la termodinámica. Sin embargo, todos los intentos que se realizaron para explicar esta radiación mediante las teorías clásicas fueron vanos. Vamos a analizar el más acertado de estos intentos, que fue lo que se conoce como el modelo de Rayleigh-Jeans.

Con este modelo se pretende analizar la radiación electromagnética que se propaga dentro de una cavidad cuando se encuentra en equilibrio térmico. Sabemos que el espectro de la radiación no depende de la forma de la cavidad ni de la composición de las paredes. Por tanto, tampoco dependerá de las condiciones de contorno en las paredes, ya que éstas son muy distintas, por ejemplo, para un conductor que para un dieléctrico.

Lo primero que hicieron fue calcular el número de modos (número de ondas planas distintas) que se pueden propagar en una cavidad cúbica de lado a. y cuyas frecuencias estén comprendidas entre ν y $\nu + d\nu$. Pues bien, resulta que este número no depende de las condiciones de contorno que se consideren. Se pueden escoger paredes conductoras, de modo que el campo eléctrico sea nulo en las paredes de la cavidad, o condiciones de contorno más sencillas, como las condiciones de contorno periódicas. El número que se obtiene es siempre el mismo y vale:

$$N_\nu(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2\, d\nu$$

Como se puede ver, este número es proporcional al cuadrado de la frecuencia y, por lo tanto, hay más ondas de frecuencias altas que pequeñas. Esto es lógico ya que a mayor frecuencia menor longitud de onda, de modo que "cabe" un mayor número de ondas distintas con frecuencias grandes.

Para comparar con el espectro del cuerpo negro que hemos presentado anteriormente, tenemos que calcular la energía por unidad de volumen de la radiación que tiene su frecuencia comprendida entre ν y $\nu + d\nu$, de modo que vamos a asignar a continuación una energía a las ondas planas que se propagan dentro de la cavidad. Una onda electromagnética que se propague dentro de la cavidad puede tener cualquier valor de la energía, ahora bien, si la radiación electromagnética se encuentra en equilibrio térmico con la cavidad será más probable que tenga una energía pequeña que una que sea mucho mayor que la energía característica del cuerpo, que viene dada por k_BT, donde k_B es la constante de Boltzmann y T la temperatura del cuerpo. La distribución de energías en el equilibrio térmico tiene una forma universal que no depende de lo que se describa. Es la misma para las partículas de un gas que para nuestras ondas planas y se trata de la distribución de Boltzmann, que es:

$$\rho_E(E)\,dE = Ae^{-E/k_BT}\,dE$$

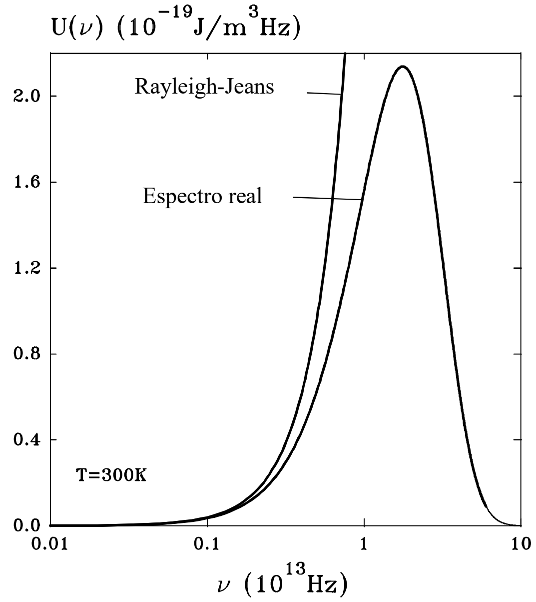
donde $\rho_E(E)\,dE$ es la probabilidad de que la energía esté comprendida entre E y $E+dE$. A partir de esta distribución de energías podemos calcular el valor medio de la energía:

$$\langle E\rangle = \frac{\int_0^\infty E\rho_E(E)\,dE}{\int_0^\infty \rho_E(E)\,dE} = k_BT$$

que es independiente de la frecuencia. Por último, podemos calcular la energía de la radiación térmica por unidad de volumen cuya frecuencia está comprendida entre ν y $\nu+d\nu$, que es lo que habíamos notado como la función $U(\nu)\,d\nu$. Lo que tenemos que hacer es multiplicar el número de $N_\nu(\nu)\,d\nu$ por la energía media k_BT y dividir por el volumen de la cavidad, y se obtiene el siguiente resultado:

$$U(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi k_BT}{c^3}\nu^2\,d\nu$$

Esta ecuación se conoce como la fórmula de Rayleigh-Jeans para el espectro de la radiación del cuerpo negro. En la siguiente figura se muestra una comparación entre el resultado que predice la fórmula de Rayleigh-Jeans y el espectro real de la radiación del cuerpo negro. Como se puede observar, la fórmula de Rayleigh-Jeans se ajusta bien al espectro de radiación real para el caso de frecuencias pequeñas. Sin embargo, para frecuencias grandes la fórmula de Rayleigh-Jeans diverge mientras que el expectro real es convergente. Además, la fórmula de Rayleigh-Jeans conduce a un resultado absurdo y es que si integramos la función $U(\nu)$ para todas las frecuencias para obtener la energía total de la radiación se obtiene un valor infinito. Este resultado absurdo se conoce como la catástrofe del ultravioleta. Ninguno de los intentos que se realizaron a finales del siglo XIX consiguió explicar la radiación del cuerpo negro.



Wien había encontrado mediante argumentos termodinámicos que la función $U(\nu)$ tenía que ser de la forma $U(\nu) = \nu^3 f(\nu/T)$, sin embargo la función f no se podía determinar mediante argumentos termodinámicos. Wien pudo ajustar de forma aproximada la función $U(\nu)$ introduciendo el comportamiento exponencial que presenta el espectro real de la radiación térmica para altas frecuencias, de modo que, de acuerdo con los argumentos de Wien:

$$U(\nu)\, d\nu \propto \nu^3 e^{-c\nu/T}$$

siendo c una constante. Esta ecuación se ajusta bien para altas frecuencias pero no para pequeñas.

Finalmente, en 1900 Planck presentó sus resultados sobre un ajuste empírico del espectro real de la radiación del cuerpo negro. La fórmula que Planck encontró empíricamente conseguía reproducir el espectro real de la radiación térmica para todas las frecuencias y temperaturas. Planck aprovechó el comportamiento de la fórmula de Rayleigh-Jeans para frecuencias pequeñas y el de la fórmula de Wien para frecuencias grandes. La fórmula de Planck es la siguiente:

$$U(\nu)\, d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\, d\nu$$

siendo h una constante ($h = 6.63 \cdot 10^{-34}$ J·s).

Sin embargo, Planck tardó algún tiempo hasta que consiguió justificar la fórmula que había encontrado. Planck conocía los experimentos de Hertz, mediante los cuales una carga oscilante emite radiación electromagnética de la misma frecuencia que la de oscilación, de modo que pensó que la radiación dentro de la cavidad se debía a los electrones de las paredes de la cavidad que describían un movimiento oscilatorio. Planck encontró que se podía justificar la fórmula que había encontrado suponiendo que los electrones, al oscilar, no puede tener cualquier energía. De esta forma, un electrón que oscile con frecuencia ν sólo puede tener una energía múltiplo entero de $h\nu$. La constante h la dejó como un parámetro de ajuste. Como consecuencia de la hipótesis de Planck, la energía de una onda electromagnética de frecuencia ν que se propague en la cavidad no toma valores continuos sino discretos múltiplos enteros del valor $h\nu$. En este caso, el valor medio de la energía se calcula sumando sobre todos los posibles valores discretos de la energía, en lugar de integrar:

$$\langle E\rangle = \frac{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu A e^{-nh\nu/k_BT}}{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A e^{-nh\nu/k_BT}} = \frac{h\nu e^{-h\nu/k_BT}}{1-e^{-h\nu/k_BT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}$$

A partir de la hipótesis de Planck podemos calcular la función $U(\nu)$ tal como hicimos en el modelo de Rayleigh-Jeans, obteniendo la fórmula que se ha presentado anteriormente. La fórmula de Planck no sólo se ajusta perfectamente al espectro real de la radiación térmica, sino que también permite obtener la ley de Wien y la ley de Stefan-Boltzmann. Podemos entender por qué la hipótesis de Planck resuelve la catástrofe del ultravioleta y es que para frecuencias muy grandes la probabilidad de obtener el valor más pequeño de la energía, $h\nu$, decae exponencialmente con la frecuencia de acuerdo con la distribución de Bolzmann

El buen acuerdo de la fórmula de Planck, nos puede llevar a pensar que la hipótesis de Planck debe ser un reflejo de lo que ocurre en la realidad. De hecho, hoy en día sabemos que la energía de la radiación electromagnética sólo puede tomar valores discretos, de modo que la energía de una onda electromagnética de frecuencia ν sólo puede tomar valores que sean múltiplos enteros de $h\nu$, es decir, 0, $h\nu$, $2h\nu$, $\cdots$. Podemos comprender ahora por qué la fórmula de Rayleigh-Jeans funciona bien para el caso de frecuencias pequeñas. Para el caso de frecuencias pequeñas, el valor de $h\nu$ también será pequeño, de modo que se puede considerar la energía de la radiación electromagnética como continua en lugar de discreta. Para valores pequeños de la frecuencia, la exponencial que aparece en la fórmula de Planck se puede aproximar de la siguiente forma:

$$e^{h\nu/k_BT}-1 \simeq \frac{h\nu}{k_BT} \qquad \text{y} \qquad U(\nu)\,d\nu \simeq \frac{8\pi k_BT}{c^3}\nu^2\,d\nu$$

y se recupera por tanto la fórmula de Rayleigh-Jeans. De hecho, el carácter discreto de la energía de la radiación electromagnética se debe al valor finito de la constante de Planck. Si la constante de Planck fuera nula, la energía de la radiación sería continua. Por tanto, según estamos viendo y según veremos a lo largo de todo el curso, la teoría cuántica debe contener a las teorías clásicas en el límite en el que la constante de Planck tiende a cero. La hipótesis de Planck, fue el nacimiento de la Física cuántica, sin embargó, vamos a ver que aunque Planck justificó el resultado obtenido, no dio una interpretación correcta. Nos podemos preguntar por qué tardó tanto en descubrirse el carácter discreto de la energía de la radiación electromagnética y la respuesta está en el valor tan pequeño de la constante de Planck, ya que su valor es $h = 6.626\cdot 10^{-34}$ J·s. Por lo tanto, en muchos fenómenos que ocurren a nivel macroscópico es absolutamente imposible observar la discretización de la energía. Si en el estudio de un fenómeno dado resulta que $h\nu$ es muy pequeño comparado con la energía característica del sistema, la energía electromagnética podrá ser considerada como continua y el fenómeno podrá ser explicado con las teorías clásicas.