

REAL ACADEMIA
DE
CÓRDOBA

COLECCIÓN
RAFAEL CABANÁS
PAREJA

I

LAS CIENCIAS EN LA CÓRDOBA ANDALUSÍ



COORDINADORES

JOSÉ ROLDÁN CAÑAS
MARÍA FÁTIMA MORENO PÉREZ

REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS, BELLAS LETRAS Y NOBLES ARTES DE
CÓRDOBA

2019

J. ROLDÁN CAÑAS
M.F. MORENO PÉREZ
COORDINADORES


REAL ACADEMIA
DE CÓRDOBA
1810

2019

**JOSÉ ROLDÁN CAÑAS
MARÍA FÁTIMA MORENO PÉREZ
COORDINADORES**

**LAS CIENCIAS EN LA CÓRDOBA
ANDALUSÍ**

**REAL ACADEMIA
DE CIENCIAS, BELLAS LETRAS Y NOBLES ARTES DE
CÓRDOBA**

2019

LAS CIENCIAS EN LA CÓRDOBA ANDALUSÍ

Colección *Rafael Cabanás Pareja, I*

Coordinador científico:

José Roldán Cañas, académico numerario

Coordinadora editorial:

María Fátima Moreno Pérez, académica correspondiente

Portada:

Azafea de Azarquiel que se exhibe en el Museo de la Calahorra de Córdoba y es una reproducción de la existente en la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona

Con permiso de la Biblioteca Viva de al-Andalus

Fotografía de Manuel Sáez

© Real Academia de Córdoba

© Los Autores

ISBN: 978-84-120698-6-0

Dep. Legal: CO 1635-2019

Impreso en Litopress. edicioneslitopress.com – Córdoba

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopias, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información y sistema de recuperación, sin permiso escrito del Servicio de Publicaciones de la Real Academia de Córdoba.

Resumen

Hasta 1921 la historiografía matemática en España no tenía ningún registro de científicos musulmanes medievales, entonces Sánchez Pérez publicó su obra en la que se citan casi 200 nombres, de los que en la mayoría de los casos solo se incluye alguna traza de su vida y su obra. Desde entonces, muchos han sido los estudios que han situado a alguno de esos personajes en su justo nivel, aunque falta mucho por hacer. En las líneas que siguen se presentan algunos de los más destacados matemáticos andalusíes, su obra y su vida, los antecedentes científicos y sociales que les influyeron y la trascendencia que posteriormente llegaron a tener sus trabajos.

Palabras clave

Álgebra, Almagesto, proporción, proyección, qibla, tablas *Sindhind*, trigonometría esférica.

Summary

Until 1921 the mathematical historiography in Spain had no record of medieval Muslim scientists, then Sánchez Pérez published his work in which almost 200 names are cited, of which in most cases only a trace of his life and work is included. Since then, there have been many studies that have placed some of those people at their level, although there is still a lot to do. The following lines present some of the most outstanding Andalusian mathematicians, their work and their lives, the scientific and social background that influenced them and the importance that their work subsequently had.

Keywords

Algebra, Almagesto, proportion, projection, qibla, tables *Sindhind*, spherical trigonometry.

1. Antecedentes y marco histórico

La cultura islámica comienza en la península arábiga donde, a partir de la Hégira en el 622, se crea un imperio que en poco más de 100 años dominará desde los Pirineos hasta la India y desde el Cáucaso hasta el Sahara. Además de textos clásicos como el de Varela y Llana (1989) o el de Cahen (1986) en los que se profundiza en los orígenes y el desarrollo del imperio árabe, existe un magnífico texto divulgativo de Pizarro Alcaide y Baena Recio (2012) que, además de incluir un resumen muy claro de estos aspectos, constituye un estupendo ejemplo de coordinación para la docencia de matemáticas e historia en la educación secundaria. A lo largo de esta introducción seguiré estos textos.

La población originaria de la península arábiga estaba constituida por un grupo de tribus, muchas de ellas nómadas, que se dedicaban, entre otros menesteres, al pastoreo y al comercio. En esa época Yatrib (Medina) es un importante centro económico y comercial, que se convierte en capital política desde la época de Mahoma, aunque la capital espiritual se establece en La Meca.

En el año 661, los califas de la dinastía Omeya trasladaron la capital a Damasco y abrieron una importante vía de culturización en la que no faltaron influencias griegas e indias. Durante su reinado se produce una gran expansión del imperio. En el año 750, una revuelta encabezada por Abu al-'Abbas derrotó al último califa Omeya e instauró una nueva dinastía. Los miembros de toda la familia Omeya fueron asesinados, excepto el joven Abd-al-Rahman, que huyó y se refugió en la Península Ibérica. A partir del año 762, al-Mansur, el segundo califa Abbasida trasladó la capital a Bagdad, aquí los califas pusieron un gran interés en la agricultura, se ocuparon de engrandecer la ciudad construyendo gran cantidad de edificios e infraestructuras y atrajeron la ciencia y los científicos, a los que les ofrecían instalaciones, como la Biblioteca fundada por Harun al-Raschid (conocido por ser el protagonista de las mil y una noches), a la que se ocupó de incorporar tantos textos como pudo; se conocen embajadas de Harun con el encargo de traer libros a la biblioteca. El califa al-Mamun (reinó entre 813-833), hijo de Harun (aunque sucedió en el trono a su hermano al-Amin), amplió las instalaciones de la Biblioteca, dando origen a la denominada Casa de la Sabiduría, a imagen de la Biblioteca de Alejandría. A partir de esta época se produce en Bagdad un gran

interés por la cultura y proliferaron las bibliotecas, a las que acudían interesados gran cantidad de científicos de todo el imperio.

En la Casa de la Sabiduría se reuniría una pléyade de científicos y traductores que impulsó la ciencia árabe y permitió que muchos de los textos clásicos, especialmente griegos, hindúes y persas fuesen conocidos en el mundo musulmán y, posteriormente, en el Occidente cristiano (Moreno Castillo, 1998, 2010a). Algunos de los científicos más famosos en esta época trabajaron aquí hasta que los Mongoles la destruyeron durante la toma de Bagdad en 1258. No obstante, Nasir al-Din al-Tusi, importante astrónomo, filósofo, matemático, médico y teólogo persa rescató cerca de 400.000 manuscritos y los llevó a Maragheh -también citado como Maraga-, al norte de Irán, donde Hulagu Khan construyó un observatorio para albergar a al-Tusi y los manuscritos. Este observatorio, de grandes dimensiones, estuvo en funcionamiento al menos cincuenta años. Con las observaciones obtenidas en él, al-Tusi construyó un modelo de movimiento de la luna que superó al determinado con los cálculos ptolemaicos. Se ha podido comprobar que elementos de al-Tusi están presentes en el *De Revolutionibus* de Copérnico (Samsó, 2003).

Más tarde, en 1420 Ulugh Beg, gobernador de Samarcanda, construyó un observatorio en la ciudad, a semejanza del de Maragheh, con un sextante de tres pisos de altura, quizás el más grande de la antigüedad. En este observatorio trabajó al-Kashi, el último gran matemático musulmán del Medievo. A su muerte en 1436 la matemática árabe decayó.

Entre los matemáticos que trabajaron en la Casa de la Sabiduría destacan:

Al-Jwarizmi (en torno a 750-830). Es el primer gran matemático musulmán que alcanzó fama. De toda su obra se han conservado cinco libros (Moreno Castillo, 2009):

- Un tratado sobre aritmética que incluye la utilización del sistema de numeración hindú.
- Otro donde se inicia el álgebra (al Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala): aquí se introducen métodos algebraicos para resolver ecuaciones aplicando la trasposición de términos (al-jabr, restituir los huesos rotos o dislocados a su lugar original, de la que se deriva la palabra álgebra) y la reducción de términos semejantes (muqabala).
- Unas tablas astronómicas, adaptando otras de tradición india denominadas *Sindhind*. De esta obra de al-Jwarizmi solamente se

ha encontrado una traducción de una adaptación para el meridiano de Córdoba realizada por Maslama el Madrileño en el siglo X.

- Un tratado sobre el calendario judío en el que demuestra un gran conocimiento de la Biblia y respeto por los seguidores de esta religión.
- Un tratado sobre geografía, influido por la Geografía de Ptolomeo.

Los hermanos Banu Musa (siglo IX), que dirigieron una serie de observaciones astronómicas que fueron recopiladas en las llamadas tablas Mamuníes. En matemáticas escribieron textos sobre superficies esféricas, en geometría describen el trazado de la elipse del jardinero, también abordaron el problema de la trisección del ángulo.

Thabit ibn Qurra (826-901), autor de una generalización del teorema de Pitágoras y, entre otras cosas, del estudio de los denominados números amigos.

Entre otros matemáticos musulmanes de la edad media se pueden citar:

Al-Battani (850-929): Divulga la aritmética hindú y el uso del cero. Su principal aporte está en la trigonometría, se inclinó por el uso del seno en lugar de la cuerda. Demostró el teorema del seno y que la tangente es el cociente entre el seno y el coseno.

Abu'l Wafa (940-998). Definió todas las funciones trigonométricas y determinó las relaciones entre ellas.

Al-Haytham (Alhazen) (965-1039): Es el primer gran científico que defiende el Empirismo como fuente de conocimiento. Destacó por sus estudios en óptica, tanto desde el punto de vista de la propagación de la luz como de la visión. Interesado en problemas de tipo geométrico, dio nombre a un célebre problema sobre la reflexión en un espejo curvo.

Al-Biruni (973-1048): Reputado como el matemático más importante de la edad media islámica (Samsó, 2003), investigó sobre la suma de series y sobre métodos de resolución de ecuaciones algebraicas. También se interesó en la trisección del ángulo o en cálculos relativos al calendario.

Omar Jayyan (1048-1131): Resolvió gráficamente ecuaciones de tercer grado mediante secciones cónicas. Descubrió la expresión para el desarrollo de la potencia de un binomio. Dirigió un observatorio astronómico en Ismahan, donde, gracias a sus observaciones pudo determinar la duración del año con mayor precisión que la que se dio en la reforma gregoriana del calendario.

Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274): Conocido como una de las personas más sabias de su época. Entre su obra publicó un Tratado sobre los cuadriláteros y profundizó en el estudio de trigonometría esférica, siendo uno de los primeros en analizar los casos de resolución de triángulos esféricos rectángulos. Fue el primer director del observatorio de Maragheh. Es uno de los más importantes astrónomos musulmanes, elaboró las Tablas Iljaníes que proporcionan datos muy precisos sobre el movimiento de los planetas.

Al-Kashi (1380-1429): apoyó el uso de fracciones decimales en lugar de las sexagesimales. Calculó la longitud de la circunferencia goniométrica, es decir, el doble del número π con 16 cifras decimales. Fue el último astrónomo y matemático árabe de entidad. Dirigió el observatorio de Samarcanda.

1.1. Características de la matemática árabe

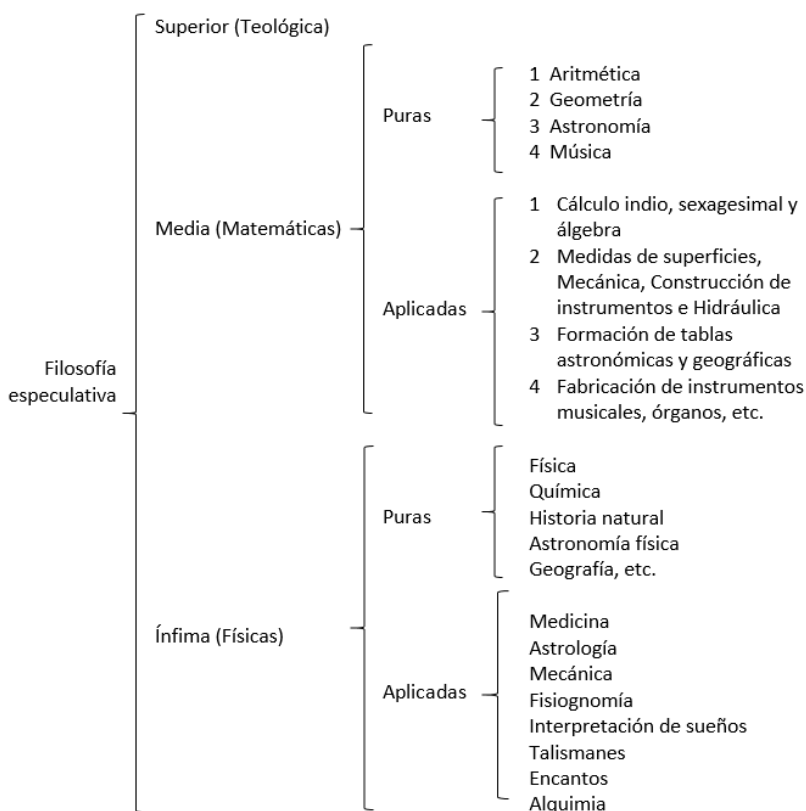
Según algunos autores, como Martos (2001), la matemática musulmana surge como respuesta a una serie de cuestiones que les son vitales para:

- a) La religión: determinación de la hora de oración, comienzo del mes lunar, orientación de la quibla, el lugar hacia el que dirigir sus oraciones, ha fomentado el desarrollo de la geometría y trigonometría esférica.
- b) El comercio: podría haber influido en la introducción del sistema de numeración decimal, de origen indio; el desarrollo de la aritmética: operaciones con fracciones decimales y, sobre todo, sexagesimales, algoritmos de cálculo de raíces cuadradas o cálculo aproximado de las mismas; el auge del álgebra: resolución de ecuaciones de segundo grado o superior y sistemas de ecuaciones.
- c) La agrimensura, lo que puede ser el origen del gran desarrollo de la trigonometría plana llevado a cabo por los matemáticos de esta época.
- d) La adjudicación de herencias: Las complicadas leyes hereditarias coránicas provocaron la aparición de expertos en estas cuestiones y, probablemente, influyeron también en el interés por los problemas de repartos, que son abordados por los matemáticos recurriendo al álgebra, mediante la resolución de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales o diofánticas.

Así pues, la matemática árabe posee varias características, Martos en la obra citada, las enumera:

- Tiene una clara influencia de las matemáticas que se habían desarrollado en la India y en la Grecia clásica.
- Hereda el rigor en las demostraciones y en el método, pero carecen del carácter especulativo de los griegos.
- Es una matemática “aplicada” y está muy relacionada con otras disciplinas, como la astronomía o la óptica. La geometría experimenta un gran impulso durante esta época.
- El carácter enciclopédico de los matemáticos de la época: frecuentemente eran también músicos, poetas, filósofos o médicos y desarrollan investigaciones también en astronomía u óptica.
- Muchas de las obras producidas muestran un claro interés didáctico, con abundancia de ejemplos y aplicaciones.

En realidad, habría que decir que, en esos años, la división de las ciencias no era en absoluto tan nítida como la hacemos ahora. Sánchez Pérez (1921) se hace eco del siguiente esquema, que representa la organización de la Filosofía especulativa según Avicena:



Como se ve, la matemática de esta época, según sus propios coetáneos, incluía un grupo de disciplinas como la música, la astronomía o la fabricación de diversos instrumentos musicales o mecánicos; pero no era infrecuente que los “matemáticos” se ocupasen también de otros ámbitos, como la medicina, la geografía o la astrología.

2. La matemática y matemáticos de al-Ándalus

2.1 Introducción

La principal característica de la obra matemática conocida elaborada en al-Ándalus es su orientación a la astronomía y la dificultad de encontrar obras completas de la mayoría de los autores. No se han conservado muchos documentos, aparte de tablas astronómicas, memorias de instrumentos de medida e instrucciones para su construcción y uso.

Tampoco se tiene mucha información sobre la vida de los propios matemáticos. La historiografía de la ciencia árabe medieval nace en España a principios del siglo pasado, aunque los primeros investigadores se interesaron más por otros ámbitos, como la literatura, la arquitectura, la historia o el arte, pero no se prestó mucho interés a la matemática.

Ante esta situación, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales convocó en 1917 un concurso sobre biografías de matemáticos españoles anteriores al siglo XVIII. El ganador fue José Augusto Sánchez Pérez, con su obra titulada *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*, que fue finalmente publicada en 1921. De ella existe una edición facsímil publicada por la Fundación El legado andalusí en 1995. Al principio de su obra, delante del Prólogo sitúa el siguiente Lema:

“Vinieron los árabes y, renovando lo que ignoraba la Europa gótica, resucitaron el gusto a las Matemáticas”.

Del Pasatiempo de D. Juan Pablo Forner, Madrid, Imprenta Real, 1787, página 41.

El libro desarrolla las biografías de 191 matemáticos, de los que en muchos casos solamente indica orientaciones sobre su obra y su especialidad, su lugar de nacimiento y muerte y el lugar donde trabajó.

Con todo, a lo largo del siglo XX y XXI, se ha desarrollado una importante labor de investigación en torno a la matemática medieval andalusí y a sus personajes en nuestro país. Actualmente en España

hay dos polos que concentran los estudios en este sentido. Por un lado, la Universidad de Barcelona, en la que surge en torno al profesor J. M. Millás una línea que se mantiene hasta hoy, cuyas principales figuras son, además del citado, los profesores Juan Vernet y Julio Samsó, que han trabajado sobre la historia de la ciencia medieval, con especial dedicación hacia la astronomía. Su estilo es académico y los libros de estos tres autores son monografías verdaderamente imprescindibles, con una excelente documentación. El otro polo se encuentra en Madrid, en torno al profesor Juan Martos, que ha publicado diversos artículos sobre el estado actual de las investigaciones sobre la matemática andalusí, con una lista muy completa de referencias. Relacionado con él, pues le prologa alguna de sus obras, podemos citar a Ricardo Moreno Castillo, matemático, doctor en filosofía, profesor de Matemáticas de Instituto y en la Universidad complutense de Madrid y gran divulgador de las matemáticas árabes y andalusíes, tiene obras sobre al-Jwarizmi, sobre al-Khayyam, y sobre Ibn al-Samh y varios artículos en revistas científicas.

Además, hay multitud de autores internacionales, ligados a varias Universidades que han trabajado sobre matemáticos andalusíes o relacionados con ellos, cabe citar aquí al matrimonio Kennedy, que trabajó en Beirut, el profesor King, de la Universidad de Frankfurt, prolífico autor de interesantísimos artículos, alguno de los cuales se citan a lo largo de este trabajo, así como los del profesor Jan Hogendijk, de la Universidad de Utrecht, en especial los relacionados con al-Mu'taman, matemático y rey de Zaragoza. Finalmente, el profesor Djebbar, que ha trabajado en las Universidades París Sur y Lille ha publicado diversos artículos y capítulos de libros sobre matemáticos andalusíes y su influencia en el Magreb, y ha descubierto en Marrakesh y en Cairouan obras que han permitido conocer y valorar a varios de ellos.

2.2 Las matemáticas de al-Ándalus hasta la llegada de los Omeyas

Tal como se ha indicado, para autores como Sánchez Pérez (1921, 1995), la cultura en al-Ándalus era un yermo hasta la llegada de los Omeyas, sin embargo, Samsó (1992), aun coincidiendo sustancialmente con él, indica que es muy probable que existiera un sustrato de cultura mozárabe, muy vinculada a la iglesia, cuya figura suprema es Isidoro de Sevilla y sus Etimologías. Esta corriente cultural se habría mantenido entre ciertos estratos sociales y quedaría reflejada en obras como *El libro de las Cruces*, texto alfonsí que recoge una

tradición árabe y mozárabe antigua que es básicamente un calendario de efemérides para las previsiones de tipo agrícola. Todo este substrato se iría confundiendo con la cultura de los invasores, que, por otro lado, no cabe esperar que fuese muy superior, ya que el grueso de las tropas eran bereberes y solamente algunos de los comandantes serían árabes, puede que alguno de ellos ni siquiera fuera árabe nativo, sino emigrantes de segunda o tercera generación (Vernet, 1975, 1986).

2.3 Fundamentación de la cultura científica andalusí

Por todo ello, y salvo las excepciones de algunos astrólogos más o menos científicos, como el propio conquistador Musa, no se puede decir que la cultura floreciese en al-Ándalus hasta que se instauró la dinastía Omeya en el 756 y aun así, salvo para el caso de Abd al-Rahman I, interesado en la cultura científica, que hizo construir el palacio de la Russafa a imagen del que había en Damasco, donde se aclimataron diversas especies vegetales orientales, tales como la palmera y algunas variedades de granado y de higuera, no se conocen matemáticos de relevancia hasta la proclamación del califato (Vernet, 1986).

Fue bajo el reinado de Abd al-Rahman II y sus sucesores cuando se inicia un interés por la cultura científica con influencia oriental, así, se cita (Samsó, 1992) a al-Harrani, médico de Abd al-Rahman II, procedente de Bagdad, y a sus nietos Ahmad y Umar b. Yunus, que estudiaron con Thabit Ibn Qurra, como posible vía de entrada en al-Ándalus de las primeras obras de éste y otros matemáticos orientales. Este interés se vio abonado por el del emir hacia la astrología, disciplina denigrada por el islam ortodoxo, pero a la que es muy aficionada especialmente las capas más altas de la sociedad. Parece que esta tendencia fue apoyada por una serie de fenómenos, tales como un eclipse de sol en 833, la visión de un cometa (quizás el Halley) en 837 o una caída masiva de estrellas fugaces que se produjo en 839. Todo ello se asoció con presagios más o menos venturosos y provocó el interés por la astrología y la astronomía. Durante el reinado de Abd al-Rahman II se tiene ya conocimiento de las tablas del *Sindhind*, probablemente la versión de al-Jwarizmi, seguramente traídas por los científicos orientales llamados por el emir.

El astrónomo más influyente durante el reinado de Abd al-Rahman II fue Abbas Ibn Firnás, que es citado como el primer científico andaluz. Fue músico, alquimista, aficionado a la magia blanca, astrónomo y matemático, construyó la primera esfera armilar de la que se tenga noticia en al-Ándalus e hizo construir una reproducción de la bóveda

celeste en una habitación de su vivienda. Introdujo la producción de vidrio en el Califato y fue promotor de una escuela de mecánica en la que se fabricaron autómatas, incluso se dice (Martos, 2001), que fue constructor de una clepsidra con la que se podía saber la hora aunque no se pudiese observar el cielo, para el hijo y sucesor de Abd al-Rahman II, Muhammad I. Martos (2001) le atribuye a él y a Abbas Ibn Naesih la introducción en al- Andalus de las tablas *Sindhind*.

Bajo el largo reinado de Abd al-Rahman III (912-961) se sentaron las bases que permitieron el florecimiento de la cultura científica. Se creó una Biblioteca, cuyos fondos no dejaron de aumentar, llegando al culmen bajo el reinado de al-Hakam II (961-976), cuando se dice que la biblioteca contenía más de 400.000 volúmenes; solamente el catálogo ocupaba 44 volúmenes (Martos, 2001). Muchos de los fondos fueron traídos por orden expresa de los califas, para lo que enviaban embajadores a Oriente. Pero esta situación no es un hecho aislado, durante la segunda mitad del siglo X florecen las bibliotecas privadas en la ciudad de Córdoba, en torno a su mezquita aljama se crea un centro de difusión cultural en el que se discute, se enseña y se aprende medicina, matemáticas y astronomía. Lamentablemente, todo esto cambiaría bajo el gobierno de Almanzor, quien mandó destruir la mayoría de los textos de contenido astronómico de la biblioteca de al-Hakam, que quedaría completamente destruida en 1013, tras el saqueo de la ciudad por los bereberes.

3. Maslama de Madrid y su escuela

Durante el reinado de Alhakam II y su sucesor Hisham II, surge la mayor figura de la matemática en el siglo X (Vernet y Catalá, 1965), fue Âbû-l-Qâsim Maslama ibn Âhmad al-Faradi al-Hasib al-Qurtubî al-Maÿrîtî, conocido como Maslama al-Mayriti o el Madrileño, fue matemático, astrónomo y astrólogo. Aunque no se conoce apenas nada de su vida y poco de su obra, se sabe que nació en Madrid a mediados del siglo X, pero se trasladó a Córdoba, en donde fue discípulo del famoso geómetra Abd al Gafir b. Muhammad, Sa'ïd al-Andalusî (2000, pag 144), y del matemático y astrónomo Abu Bakr b. Abi Isa – de quienes hoy se conoce poco más que sus nombres-, al tiempo que sostenía relación con el núcleo de científicos cordobeses introductores de la ciencia helenística en al-Andalus. Murió en Córdoba en el año 1007, después de haber predicho el fin del califato (que ocurrirá en 1009) y la fitna que le seguirá.

La mayor parte del conocimiento que tenemos de la vida y obra de éste y otros muchos científicos andalusíes aparece en el *Kitab tabaqat al-umam* o *Libro de las categorías de las naciones*, del cadí Sa'íd de Toledo, también conocido como Sa'íd al-Andalusí, que es una auténtica enciclopedia de la ciencia y sus autores en al-Ándalus hasta el siglo XII. El título de la obra hace referencia a una clasificación que hace el autor de las naciones de su época, las divide en dos categorías, la primera, en la que están aquellas naciones que cultivan la ciencia; y la segunda categoría, formada por las naciones que no la cultivan, de esta categoría dice que “se parecen más a los animales que a los hombres” (pág 60). Cito la obra como Sa'íd al-Andalusí (2000) ya que este año la editorial Trotta ha publicado la traducción, realizada por Eloisa Llaveró, con introducción y notas de Andrés Martínez.

De la fama de Maslama se hace eco el polígrafo andalusí Ibn Hazm, quien, hacia 1038, en su Epístola Apologética de al-Andalus indica: “...he oído decir a un sabio de cuya inteligencia y buena fe me fío y al que se le considera muy competente en esta materia que, en cuanto a Tablas astronómicas no hay iguales a las de Maslama e Ibn al Samh y ambos autores son nuestros compatriotas”, citado por Vernet y Catalá (1965).

De Maslama se sabe (Samsó, 1995, Escribano, 2000), que escribió, junto con dos de sus discípulos, el citado Ibn al-Samh y al-Zahrawi, un libro sobre aritmética comercial, disciplina denominada al-Mu'amalāt. La obra no se ha conservado, pero existe una prueba del género en un texto en latín, aunque el original fuese probablemente árabe según Sesiano (2014). El texto data del siglo XII y su autor es Juan de Sevilla, un conocido traductor. Su título es Liber Mahameleth y consta de:

- a) Una parte teórica, con teoría de proporciones y operaciones aritméticas, incluso cálculo aproximado de raíces cuadradas, también métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado y de sistemas de ecuaciones. Resume todo lo conocido de Euclides, Arquímedes, Nicómaco, al-Jwarizmi y Abu Kamil.
- b) Una colección de problemas sobre temas de compra y venta de mercancías, contratación de obreros, repartos, alimentación de ganado y cambio de monedas.

Existe una completa compilación con el texto latino y su traducción al inglés realizada por Sesiano (2014), con indicaciones de los lugares en donde se aplicaban los distintos procedimientos descritos dentro de al-Ándalus en el siglo XII. Incluye la traducción de los problemas

propuestos con indicaciones sobre su resolución, también según el álgebra actual, para que resulte más sencillo al lector.

Aunque no se puede saber si el Liber es la traducción de la obra de Maslama o no, da idea del álgebra que se usaba en esta época.

Maslama también fue autor de una adaptación de las tablas *Sindhind* de al-Jwarizmi, tanto que a partir de él se les suele denominar Zij (tablas) de al-Jwarizmi-Maslama. En realidad, las tablas originales de al-Jwarizmi se han perdido, así como las adaptadas por Maslama, aunque se han conservado recensiones realizadas por alumnos suyos, de las que se han realizado traducciones latinas. Samsó (1995) lo resume en el cuadro siguiente:

Sindhind de al-Jwarizmi

- Recensión mayor (con demostraciones): perdida
 - Comentario de Ibn al-Mutanná
 - ▣ Versión latina de Hugo de Santalla
 - ▣ Dos versiones hebreas, una de Abraham ben Ezra
- Recensión menor (sin demostraciones): perdida
 - Versión latina de Hermann de Carinthia (1140): perdida
 - Adaptación de Maslama e Ibn al-Saffar: perdida
 - ▣ Recensión de Ibn al-Saffar
 - ▣ Recensión de Ibn al-Samh
 - ▣ Versiones latinas:
 - ✓ Adelardo de Bath (1116-1142)
 - ✓ Pedro Alfonso (S. XI-XII)

La adaptación de Maslama incluye materiales originales, mejoró la precisión de las de al-Jwarizmi y referenció algunas de ellas a las coordenadas de Córdoba. A pesar de todo, las tablas originales eran preptolemaicas y contienen errores por no tener en cuenta las excentricidades, algo que sí tienen en cuenta las tablas mamuníes y las de al-Battani.

No obstante, no se puede afirmar que Maslama ignorara las teorías ptoloméicas, pues parece que manejó el Almagesto, se especula que fuese una versión en griego o en árabe. El propio cadí Sa'íd al-Andalusí (2000), pag 146, indica que se esforzó en entenderlo y que escribió un libro (perdido) en el que resume los movimientos de los planetas según las tablas de al-Battani. Maslama conoció la obra de Thabit Ibn-Qurra, que fue traductor de la obra de Menelao y Ptolomeo, de hecho, Maslama, en sus obras manifiesta que ha

utilizado como única herramienta de cálculo, el Teorema de Menelao, aunque para esta época, en Oriente ya se conoce el Teorema del seno para trigonometría esférica.

También conoció el Planisferio de Ptolomeo, al que añadió comentarios que facilitaron la fabricación y uso de astrolabios. El Planisferio es un tratado sobre proyección estereográfica de una esfera sobre un plano. Aunque no parece que el propio Maslama escribiese sobre el astrolabio, a partir de sus comentarios al planisferio, surge en al-Ándalus gran interés por este instrumento, ya que permite resolver de manera sencilla problemas de astronomía como el movimiento del sol y de las estrellas fijas. Estos comentarios introducen una serie de innovaciones al Planisferio de Ptolomeo (Vernet y Catalá, 1965):

Tres nuevos procedimientos para dividir la eclíptica del astrolabio.

Tres nuevos procedimientos para dividir la proyección del horizonte, basados en los de la eclíptica.

Tres nuevos procedimientos para proyectar las estrellas fijas en el astrolabio, utilizando coordenadas eclípticas, ecuatoriales y horizontales.

En la segunda parte de la obra utiliza el teorema de Menelao para resolver triángulos esféricos rectángulos.

Aunque la aportación algebraica de la escuela de Maslama no es conocida, pues la mayor parte de la obra está perdida, Djebbar (1988) ha encontrado huellas de ello en diversos materiales que ha descubierto en el Magreb.

La importancia de Maslama estriba no solamente en su aportación, sino en la de sus discípulos. Maslama organizó en torno a sí una escuela de diversos autores que extendieron la labor del maestro e hicieron importantes aportaciones propias. Varios de ellos, a su vez, crearon otras escuelas (Samsó, 1995), resumiendo la información que proporciona el cadí Sa'id al-Andalusí, los agrupa en el siguiente cuadro:

Maslama	Ibn al-Jayyat	Ibn Sahr	
	Ibn al-Samh	Al-Wasiti	Ibn al-Layt
	Ibn al-Saffar →	Ibn Bargut →	Al-Saraqusti
	Zahrawi	Ibn al-Attar	Ibn al-Yallab
	Ibn-Jaldun	Al-Qurasi	Ibn Hayy
	Kirmani		

Sin embargo, de todos ellos, solamente queda alguna obra de Ibn al-Samh y de Ibn al-Saffar, además de un poema didáctico de Ibn al-Jayyat, que fue astrólogo en las cortes de Córdoba, Zaragoza y Toledo.

Tanto Ibn al-Samh como Ibn al-Saffar son autores de sendos tratados sobre el astrolabio, el del segundo de ellos es una obra breve, de carácter eminentemente práctico sobre el uso del instrumento. Quizás por ese motivo, la obra tuvo gran popularidad, tanto en el mundo árabe como en el latino. Ibn al-Saffar (Córdoba - Denia 1035) se interesó además en la construcción de relojes solares, a él se le atribuye, pues figura su nombre como el del autor, el encontrado cerca de Medina Azahara.

La obra de Ibn al-Samh (Córdoba o Granada hacia 980, Granada 1035) es mucho más extensa, se sabe que es autor de al menos once libros (Moreno, 2006) , entre los que se incluyen un comentario a la obra de Euclides, una historia de la física, unas tablas astronómicas que siguen el *Sindhind*, dos libros divulgativos sobre el cálculo, el *Libro de geometría mayor*, el *Libro de los planetarios*, que fue traducido por orden de Alfonso X bajo el título *Libro de los instrumentos de las láminas de los siete planetas* y dos tratados sobre el astrolabio, uno breve sobre la construcción del instrumento y el otro, mucho más extenso (129-130 capítulos), es el tratado más completo sobre el instrumento escrito en al-Ándalus. Contiene algunos capítulos en los que se puede apreciar la influencia de la astronomía que se venía haciendo en Oriente y justificaría el interés de la escuela de Maslama en las tablas de al-Battani. Este texto es el fundamento del libro alfonsí sobre el astrolabio esférico. Sa'id al-Andalusí indica que también es autor de un tratado sobre cónicas, que Bouzari (2009) identifica con un texto de autor hebreo encontrado en 1996 en el que se trata tanto de secciones de conos como de cilindros. En cuanto a cilindros los considera tanto rectos como oblicuos y de base circular o elíptica. Por cierto, define la elipse como la curva que se puede trazar moviendo el vértice superior de un triángulo cuya base es fija y tal que la suma de sus otros dos lados sea constante, de modo similar a como lo hicieran los hermanos Banu Musa.

Existe un documento en la biblioteca el Escorial cuyo autor es desconocido, se trata de *Risala kafiya fi'ilm al-hisab*, *Compendio del arte del Cálculo*, pero hay varios investigadores que lo atribuyen a Ibn al-Samh. El libro está dividido en diez capítulos y con un estilo que recuerda al de al-Jwarizmi por lo retórico, aborda cuestiones de cálculo aritmético: los números y las fracciones, así como operaciones con ellos, pruebas de la multiplicación y de la división. Proporciones y aplicaciones a problemas de repartos y transacciones. Dedicar un capítulo a números en progresión aritmética y otro a la resolución de problemas mediante el método de los dos errores (doble posición). La

obra ha sido publicada en versión original traducida y comentada por Moreno Castillo (2010 b) en la colección epistème de la editorial Nivola y nos detendremos en ella para ver alguno de los procedimientos matemáticos más populares en la antigüedad.

El método de la falsa posición (*regula falsi*), tanto simple como doble, ha sido uno de los procedimientos aritméticos más utilizados desde la antigüedad para la resolución de ecuaciones. Ya se usaba en tiempos de los egipcios, como lo atestigua el papiro de Rhind en 1650 AC (aproximadamente) y se ha venido usando hasta el siglo XVIII, aún hoy es fundamento de algunos algoritmos iterativos en cálculo numérico.

El capítulo décimo del *Compendio del arte del Cálculo* describe los pasos que hay que dar para llegar a la solución por el método de los dos errores (doble falsa posición):

“coges (para la incógnita) un número cualquiera; lo llamas la primera cantidad y haces con él lo que ordenó el interlocutor, si resulta el número buscado, entonces ya tienes la solución. Si no sale, coges la diferencia entre el total del resultado y el resultado que tiene el interlocutor, y lo llamas el primer error. Después coges otro número cualquiera, lo llamas la segunda cantidad y haces con él lo que ordenó el interlocutor, y si resulta el número buscado, entonces ya tienes la solución, y si no sale, coges la diferencia entre el total del resultado y el resultado que tiene el interlocutor, y lo llamas segundo error. Después multiplicas la primera cantidad por el segundo error y la segunda cantidad por el primer error. Después, si son los dos errores por exceso o por defecto, restas el menor de los resultados de multiplicar las dos cantidades por los dos errores del mayor, divides lo que sale entre la diferencia entre los dos errores, y lo que sale es el número buscado. Y si uno de los errores lo es por exceso y el otro por defecto, sumas los productos de las cantidades por los errores y divides entre la suma de ambos errores”.

Veamos un ejemplo tomado también del *Compendio del arte del Cálculo* (Moreno Castillo, 2010 b, págs. 149-150):

“... Como cuando se dice: Un hombre murió y dejó tres hijos, y legó a un hombre el mismo lote que a (cada) uno de ellos y a otro la décima parte de lo que queda del capital después de quitar un lote. Entonces coges como cantidad once y como lote uno (para que sea diez lo que queda al quitar un lote), repartes y sobran seis, que es el primer error. Después coges como cantidad doce y como lote dos, repartes y sobran tres, que es el segundo error. Como ambos errores lo son por exceso, multiplicas la primera cantidad (que es once) por el segundo error (que es tres), y sale treinta y tres, multiplicas la segunda cantidad (que es doce) por el primer error (que es seis), y sale setenta y dos, restas el menor del mayor, y sale treinta y nueve, lo divides entre la diferencia de los dos errores, que es tres, y sale trece, y ese es el capital, después multiplicas el primer lote (que es uno) por el segundo error, el segundo lote (que es dos) por el primer error, restas el mayor del menor, divides lo que sale entre la diferencia de los dos errores y

sale tres, y ese es el lote. Y si quieres dices: hay un primer error, cuando aumentamos uno disminuye a la mitad el error, y si aumentamos otro desaparece el error, y asimismo dices con el lote y sale lo que mencionamos, pero el primer camino es más general.”

En realidad, este problema tendría dos incógnitas y una sola ecuación, por lo que la solución es indeterminada, se puede considerar solución cualquier múltiplo o divisor de la solución encontrada. Lo que el autor determina no es el capital que se reparte, sino las partes que hay que hacer de él y el modo de repartirlas.

4. Matemáticas en los reinos de taifas

A pesar del hundimiento definitivo del califato en 1031, las taifas que surgieron después entablaron una especie de competencia por emular la gloria cultural de la antigua capital y abundaron gobernantes bajo cuyo mecenazgo florecieron bibliotecas, con fondos en parte procedentes de la de al-Hakam II, y academias, dando abrigo a los científicos que huían de la guerra civil o atrayendo otros desde África u Oriente. Muchos de los miembros de la escuela de Maslama volvieron a su lugar de origen y otros buscaron lugares más hospitalarios, por ejemplo, Ibn al-Saffar se estableció en Denia e Ibn al-Samh regresó a su Granada natal, donde abrió una academia. Esto sin duda produjo una difusión de ideas que floreció a lo largo del siglo XI en lo que se ha dado en llamar el “siglo de oro de la ciencia en al-Ándalus” (Samsó, 1992), que abarcaría desde 1031 hasta la toma de Toledo en 1085, aunque en realidad el “siglo” corresponda a poco más de cincuenta años.

Las figuras más importantes en este periodo son al-Mu’taman de Zaragoza e Ibn-Mu’ad de Jaen, también alcanzaron renombre Ibn Sayyid y su discípulo Ibn Bayya, más conocido como filósofo con el nombre de Avempace, aunque este último habría que incluirlo en una etapa posterior, ya que se fecha su nacimiento alrededor de 1080.

A partir de 1085 se produce una lenta decadencia de la ciencia, provocada por la mayor tensión de la reconquista cristiana, que ocasionó mayor inestabilidad y menos recursos en las taifas para dedicar al mecenazgo. Esta tendencia no disminuyó cuando se produjo la invasión almorávide a partir de 1090, pues, aunque se vuelve a unificar al-Ándalus, el ambiente cultural cambió, debido sobre todo a la mayor intransigencia religiosa de los nuevos gobernantes, que se alejan, e incluso persiguen, de todo lo que pueda estar relacionado con

la astrología o la adivinación. Tampoco están bien vistos los no islámicos, de manera que judíos y cristianos son presionados para abandonar su religión. Además, los centros de poder pasan a estar en el Magreb y es a ciudades como Ceuta, Bujía, Túnez, Fez y, sobre todo Marrakech hacia donde se dirigen algunos de los científicos andalusíes de la época, o a otros aún más lejanos, como El Cairo - como será el caso de Maimónides- o el Oriente.

4.1. al-Mu'taman, rey de Zaragoza

Desde 1036 a 1146 reinó en Zaragoza la dinastía de los Banu Hud (hijos de Hud), de la que Abu Amir Yusuf Ibn Ahmad al-Mu'taman Ibn Hud fue el tercer rey, entre 1081 y 1085. Aunque poco sabemos de su vida fuera de algunos episodios cortesanos o bélicos (Vernet, 1986; Samsó, 1992). Tanto su vida como especialmente su obra cobró interés cuando, casi de modo simultáneo, dos investigadores, A. Djebbar (1984) y J. P. Hogendijk (1986) encontraron de modo independiente documentos con parte de su obra, desde entonces ambos han colaborado y son autores de varios artículos sobre la misma en su totalidad o centrándose en ciertos capítulos (Djebbar, 1986, 1988, 1990, 1992; Hogendijk, 1988, 1990, 1995). Finalmente, Djebbar (1997) encontró copias de un documento del siglo XIV en el que el autor, Ibn Sartaq, redacta el contenido de la obra completa de al-Mu'taman, tras lo cual, ambos investigadores se han hecho eco, por ejemplo, Djebbar (1999) estudia la influencia de los Elementos de Euclides en el Istikmal de al-Mu'taman, mientras que Hogendijk (2004) comenta la tabla de contenidos que tendría el documento completo original. Bouzari (2009) analiza su aportación al análisis de las secciones cónicas.

Sabemos que el padre de al-Mu'taman, el rey de Zaragoza Ahmar al-Muqtadir, fue un eminente científico que destacó en astronomía, filosofía y geometría, amante de la ciencia y de la cultura, que mandó construir el palacio de la Aljafería de Zaragoza, organizó una importante biblioteca a la que dotó con muchos volúmenes de la ciencia griega. De la misma obra de al-Mu'taman se puede deducir que probablemente tuviese ejemplares de Euclides (Elementos), Apolonio (Cónicas), Arquímedes (Sobre la esfera y el cilindro, Medida del círculo), las Esféricas de Teodosio y de Menelao e incluso el Almagesto de Ptolomeo, bien en versión griega o traducciones al árabe, así como algunos de los textos de los eminentes matemáticos árabes que habían destacado en Oriente y al-Ándalus. Al-Mu'taman se inclinó desde muy joven hacia la ciencia y parece que pronto destacó, pues ya el cadí Sa'ïd

al-Andalusí lo cita entre los jóvenes científicos más prometedores. Con aquella biblioteca a su disposición y su propio interés y capacidad, adquirió un bagaje que se puede calificar de enciclopédico.

El trabajo científico de al-Mu'taman parece que se desarrolló antes de su llegada al trono, pues su principal obra estaba prevista para dos volúmenes, pero solamente escribió uno. La etapa política que le tocó vivir fue de luchas permanentes con los reinos cristianos —no olvidemos que Zaragoza era la frontera musulmana más al norte en al-Ándalus— y con sus vecinos reyes andalusíes como el de Lérida, que era su propio hermano al-Mundir, o el de Valencia. Precisamente bajo la bandera de al-Muqtadir y de su hijo al-Mu'taman estuvo luchando el Cid tanto contra las tropas musulmanas de Lérida o de Valencia como contra las aragonesas.

La principal obra de al-Mu'taman es su *Kitab al-Istikmal* (Libro del Perfeccionamiento), pero su contenido ha permanecido oculto hasta hace pocos años, cuando, como ya se ha indicado, Djebbar y Hogendijk han encontrado, traducido y publicado tanto la parte inicialmente descubierta, como los elementos faltantes encontrados en 1997 en el manuscrito de Ibn Sartaq, del que han aparecido dos copias idénticas, una en Estambul y la otra en El Cairo (Djebbar, 1997).

En el *Istikmal*, su autor se propone hacer una recopilación de toda la matemática conocida hasta la fecha y la organiza de un modo aristotélico en Géneros, Especies, Especies de Especies y así sucesivamente. Considera dos Géneros, el primero de los cuales se refiere a los números y a la geometría pura y está dividido en cinco especies: el número (Especie 1), la geometría plana (Especies 2 y 3), y estereometría (Especies 4 y 5), las Especies 2 y 4 se refieren a elementos “sin combinación”, mientras que las 3 y 5 lo son “en combinación”. La teoría euclídea de proporciones y triángulos semejantes son incluidos en la Especie 3, porque se trata de combinaciones de elementos. Los poliedros los inscribe en la Especie 5 porque son figuras espaciales (estereometría) pero los considera todos incluidos en esferas (en combinación), al final del documento dedica un capítulo a hacer algunos comentarios sobre los “números amigos”, cuya generación había estudiado Thabit Ibn Qurra en Bagdad durante el siglo IX. Por lo que respecta al segundo Género, su contenido estaría desarrollado en el segundo volumen de la obra, el que nunca llegó a escribir, pero gracias a los manuscritos de Ibn Sartaq se sabe que estaría compuesto por cinco especies (Djebbar, 1997): La ciencia de los graves y de los autómatas; La ciencia de la

música; La ciencia de la óptica; La ciencia de la estructura del universo y La ciencia del análisis y síntesis.

El talento del al-Mu'taman queda reflejado en varias demostraciones y teoremas originales, o que teniendo algún antecedente, los simplifica muy notablemente, así, por ejemplo, en su Especie 3, que dedica a la geometría plana en combinación, dedica la Especie 1 de la Especie 3 a la teoría de las proporciones según la idea de Euclides; entre otras aplicaciones, demuestra de un modo original la fórmula de Herón o cuatro procesos de resolución del problema de las dos medias proporcionales (Hogendijk, 1994):

Dados dos números, a y b, determinar otros dos, x e y tales que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Hasta la fecha la resolución consistía en buscar la intersección de dos parábolas, o una parábola y una hipérbola, pero al-Mu'taman lo resuelve también cortando una parábola con una circunferencia.

A continuación, se introduce en la geometría proyectiva, y demuestra la constancia de las razones cruzadas en una proyectividad. Utiliza esta propiedad para demostrar el conocido Teorema de Ceva, atribuido a Giovanni Ceva, un matemático italiano del siglo XVII, que lo demostró seis siglos después usando un razonamiento completamente distinto: el centro de gravedad y la ley de los momentos.

En la especie 5, que dedica a la estereometría, incluye una serie de construcciones preliminares, algunas de las cuales habían sido abordadas y resueltas por Ibn al-Haytham, un matemático que vivió entre 965 y 1041 –director de una Casa de la Sabiduría que había sido creada también en El Cairo–, por tanto, unos cuarenta años más joven que él. Efectivamente, en la Óptica incluye el denominado “problema de Alhazén”, consistente en trazar el rayo luminoso que va desde un foco conocido hasta un punto (ojo) conocido, reflejándose en un espejo esférico, para cuya solución precisa resolver como pasos intermedios las construcciones que aquí estamos comentando:

Sea A un punto dado sobre una circunferencia y sea BG un diámetro dado de ella. Sea un segmento KE de longitud dada. Se requiere construir una línea recta AHD que corte a la circunferencia en un punto H y en la prolongación del diámetro en otro punto D de tal modo que $HD = KE$.

Sea A un punto dado sobre una circunferencia y sea BG un diámetro dado de ella. Sea un segmento HZ de longitud dada. Se requiere construir una línea recta AED que corte a la circunferencia en

un punto D y al BG diámetro en otro punto interior a la circunferencia E de tal modo que $ED = HZ$.

Ambos problemas son en el fondo, el mismo, y algunos autores han trabajado en este u otros de semejante tipo. Huygens lo resolvió también en 1669, usando las herramientas más poderosas a su alcance, el álgebra y la geometría analítica y tildó la solución de al-Haytham de larga y tediosa. La solución aportada por al-Mu'taman es geométrica y se basa en el mismo principio que la de al-Haytham, pero más general y mucho más breve; es la misma que también utilizó Huygens: la intersección de una hipérbola y una circunferencia. Hogendijk (1995) se hace eco de una solución encontrada en 1942 por Mustafá Nazif, un estudiante egipcio, que se creyó original, pero resulta que sin saberlo (porque el Istikmal se ha descubierto más de 40 años después), había llegado a la misma solución que al-Mu'taman.

La gran extensión de temas tratados, así como su originalidad hicieron que, a pesar de su “extraña” organización, el Istikmal haya gozado de una amplia difusión, especialmente en el Magreb y en Oriente, y su autor, de reconocido prestigio. Maimónides lo utilizó en su escuela de filosofía de El Cairo y al-Banna e Ibn Mun'im lo llevaron hasta Marruecos, incluso se sabe que en el siglo XIV se preparó una nueva edición en Bagdad. De la acogida que tuvo el texto da fe la afirmación de Muhammad Ibn Ibrahim al-Afkani, para quien si el Istikmal hubiese sido completado, habría hecho superflua el resto de la literatura geométrica existente. Este viaje del texto de al-Mutamán muestra que, una vez que la ciencia en Occidente adquirió madurez, se propagó hacia Oriente, del mismo modo que en los siglos IX y X ocurrió en sentido contrario. Precisamente el autor del texto hallado en 1997 sobre el Istikmal fue alumno de un hijo de Nasir al-Din al-Tusi en Maragheh, lo que podría indicar que el texto viajó hasta allí, donde era bien conocido.

4.2. El cadí Ibn Mu'ad al-Yayyani

Sobre Abu Abd Allah Muhammad Ibn Mu'ad al-Yayyani se tiene noticias como un gran geómetra. Según diversas biografías nació en el año 989, de una familia cordobesa, vivió en Egipto entre 1012 y 1016, tuvo formación en leyes, gramática árabe y cálculo, fue cadí de Jaén y de ahí su nisba al-Yayyani. Respecto de la fecha de su fallecimiento hay cierta controversia, hay quien la cifra en 1050 y, sin embargo, su última obra trata de la predicción de un eclipse solar ocurrido en Jaén en 1079, para entonces su edad sería de 90 años, cosa extraña para la

época (Villuendas, 1979), pero hay también quien cifra su muerte en 1093 (Alcalá, 2017), de manera que, si la fecha de nacimiento fuese correcta, podría haber vivido más de 100 años.

Se sabe de su estancia en Egipto, donde podría haber recibido clases de al-Haytham, y muy probablemente en Oriente, donde debió recibir la vasta formación que poseyó y la influencia de los matemáticos de Bagdad, como Ibn Qurra (836-901) o al-Biruni (973-1048) que se aprecia en su obra.

En algunos puntos, su obra es próxima a la de al-Mu'taman, según Hogendijk (1995), es difícil establecer hasta qué punto hubo un contacto cercano entre los dos personajes y entre otros contemporáneos, el problema estriba en que la mayor parte de la documentación se ha perdido, pero es evidente que comparten interés por la teoría de la proporción según Euclides, la geometría esférica y la óptica.

La obra de Ibn Mu'ad sí se ha conservado y hay abundantes copias. Alguna de ellas, como las *Tablas de Jaén* tuvieron gran difusión, tanto en el mundo árabe como latino, pues fueron traducidas al latín por Gerardo de Cremona. En ellas, que siguen el *Sindhind*, se definen las funciones trigonométricas seno, coseno, seno verso (1-coseno) y la cuerda, aunque parece que solamente contenía la tabla del seno, que se ha perdido. También dedica varios capítulos a la aparición de la luna nueva y su determinación, de vital importancia para el calendario musulmán, proporciona fórmulas para la determinación de la qibla, por el método que al-Biruni denominó de los “zijos”, Martos y Escribano (2008), siendo el primer documento escrito en al-Ándalus que hace referencia al cálculo de la qibla por métodos matemáticos. Incluye también un apartado sobre la determinación la hora mediante una fórmula hindú exacta, conocida en Oriente:

$$\text{vers } t = \text{vers } d - \frac{\text{vers } d \cdot \text{sen } h}{\text{sen } h_m}$$

Donde, $\text{vers } x = 1 - \cos x$; t =ángulo horario; d =arco semidiurno; h =altura actual del sol, h_m =altura meridiana del sol.

En su obra *Liber de Crepusculis* proporciona un procedimiento para calcular la altura de la atmósfera. La estima en 50 millas, valor vigente en Europa hasta que Kepler, siglos después la corregiría y daría una estimación de 2.5 millas. El procedimiento consiste en suponer que en el alba (o el crepúsculo), la luminosidad del cielo se debe a la reflexión sobre el borde exterior de la atmósfera, que se comportaría como un espejo, de los rayos del sol que está oculto tras la tierra. Estima que en el momento del inicio (o el fin del ocaso), el rayo solar tangente a la

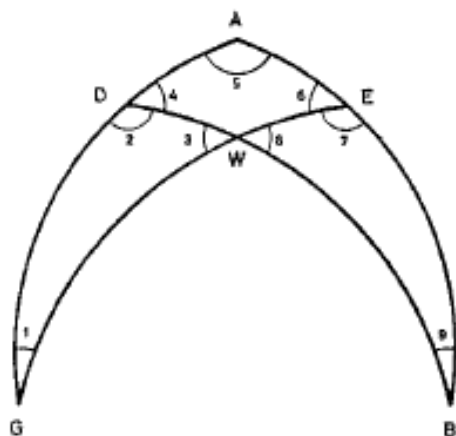
superficie de la tierra forma un ángulo de 19° por debajo del horizonte del punto de observación. Con este ángulo y sabiendo el radio de la tierra, se podría calcular la altura de la atmósfera. Tomó el valor del radio de la tierra de la *Geographia* de Ptolomeo como 3820 millas, con un factor de conversión (erróneo) de 7.5 estadios por milla.

Ibn Mu'ad dedica un libro a comentar el concepto de razón que incluye Euclides en su Libro V, definición 5ª, es el *Muqqala fi sarh al-nishba*. La definición que proporciona Euclides en los Elementos resultaba bastante extraña a los matemáticos desde que su autor la formuló. El problema surge de cómo se construye un número racional y qué pasa si el numerador (o el denominador) es un número irracional; en tal caso, el resultado no es racional. Ibn Mu'ad apoya la definición de Euclides en contra de quienes “no la han comprendido”, demostrando con ello una capacidad que solamente se ha manifestado ya en el siglo XVII cuando el problema es abordado por Isaac Barrow, dando definitivamente la razón a Euclides, ya que la forma de definir Euclides la razón permite incluir este tipo de fracciones entre los “números” mediante la construcción de sucesiones encajadas de racionales que convergen hacia un número real (aunque ni él, ni Ibn Mu'ad lo hicieron).

En el libro *Matrah su'a'at* dice el autor que tratará sobre la proyección de rayos, pero de los diez folios de que consta la obra, solamente hay uno y medio dedicado a este tema, la mayor parte del mismo la dedica a otras divagaciones y a lanzar diatribas contra algunos otros autores, como Ibn Samh.

Su obra más importante es el *Kitab mayulat qisi al-kura* o *Libro de las incógnitas de los arcos de la esfera*, se trata del primer tratado de trigonometría esférica en el que, solamente en el prólogo se declara su interés para la astronomía; en realidad tiene un tratamiento absolutamente independiente, se trata de un documento puramente geométrico. Aunque se le pueda relacionar con la obra de Ibn Qurra y de al-Biruni, su desarrollo es independiente de los matemáticos orientales y contiene elementos originales, especialmente en lo relativo a la resolución de triángulos esféricos (Schwartz, 2010). Esta obra contiene dos partes, en la primera, que es de tipo teórico se demuestran los teoremas y relaciones que serán utilizados en la segunda parte, que se dedica a casos de resolución de triángulos esféricos, que clasifica en 16 y los aborda todos e indica las condiciones que deben reunir para que exista solución, así como los que no tienen solución. A partir del Teorema de Menelao, que relaciona seis cantidades de dos triángulos

esféricos, que se cruzan compartiendo un cuadrilátero, Ibn Mu'ad demuestra seis relaciones en las que intervienen cuatro cantidades, todas del mismo triángulo (ver figura 1):



Teorema de Menelao :

$$\frac{\text{sen } BE}{\text{sen } EA} = \frac{\text{sen } BW}{\text{sen } WD} \frac{\text{sen } GD}{\text{sen } GA}$$

Figura 1. Configuración de Menelao en la esfera

En lo que sigue, las letras mayúsculas indican el ángulo diedro formado por los dos planos meridianos que contienen los círculos máximos que forman los lados que se cortan en el ángulo de ese nombre y las dos letras mayúsculas indican los extremos del arco de círculo máximo que corresponde a un lado del triángulo esférico (ver figura 2).

1.- Teorema del seno:

$$\frac{\text{sen } A}{\text{sen } BG} = \frac{\text{sen } B}{\text{sen } AG} = \frac{\text{sen } G}{\text{sen } AB}$$

2.- Regla de las cuatro cantidades

$$\frac{\text{sen } AG}{\text{sen } BG} = \frac{\text{sen } AD}{\text{sen } DZ}$$

3.- Teorema de Géber:

$$\cos G = \cos AB \text{ sen } A$$

4.- Teorema del coseno

$$\cos AG = \cos AB \cos BG$$

5.- $\text{tang } AG \cos G = \text{tang } BG$, y también: $\text{tang } AG \cos A = \text{tang } AB$

6.- Teorema de las tangentes:

$$\text{sen } AG \text{ tang } G = \text{tang } AB, \text{ y también: } \text{sen } AB \text{ tang } A = \text{tang } BG$$

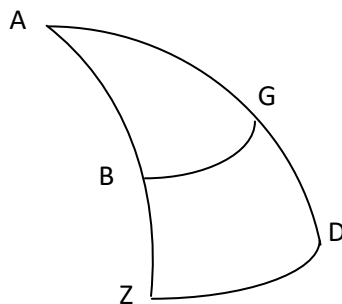


Figura 2. Denominación de elementos de triángulos esféricos

El teorema del seno lo obtiene para cualquier tipo de triángulos, en tanto que los demás los aplica solamente a triángulos esféricos rectángulos en los que los ángulos B y Z son rectos.

Algunas de las relaciones anteriores ya habían sido demostradas con anterioridad en Oriente, pero no hay constancia de que algún otro autor en la península ibérica las haya utilizado. Ibn Mu'ad, al igual que otros autores, como Abu Nasr, también utiliza el triángulo polar para resolver algunos tipos de problemas, pero no parece que haya habido relación entre ambos autores.

A la vista de estas relaciones, es muy posible que Ibn Mu'ad las aplicase al cálculo de la qibla, lo que proporcionaría un método mucho más sencillo que el de los “zijas” que describe en las *Tablas de Jaen*.

La obra contiene también tablas trigonométricas e incluye una tabla de tangentes, como cociente de senos entre cosenos y de cotangentes. Es la primera vez que aparece una tabla de tangentes sin hacer referencia a las sombras extensa ni a la conversa. Incluye los valores de las tangentes de $89^{\circ} 15'$; $89^{\circ} 30'$; $89^{\circ} 45'$ y $89^{\circ} 59'$, obtenidas a partir de las que existen en las tablas de al-Jwarizmi Maslama, por un método que no explica Ibn Mu'ad, pero que parece ser interpolación cuadrática.

En cuanto a su trascendencia, parece que, bien directamente, o bien a través de la obra de Yabîr Ibn Aflah, *Islah al Mayisti*, muy relacionada con la de Ibn Mu'ad, podría haber llegado hasta *De triangulis*, de Regiomontano (Hairetdinova, 1986), obra de suma trascendencia en toda la matemática europea, que influyó también en la de Copérnico.

4.3. Azarquiel, el más sabio

“El que mejor conoce la [ciencia] de las esferas celestes y los movimientos de las estrellas es Abu Ishaq Ibrahim b. Yahya, conocido como Walad al-Zarqiyal. Es el más sabio entre nuestros contemporáneos, en las observaciones astronómicas, la ciencia de las esferas celestes y el cálculo de sus movimientos; el que mejor conoce la ciencia de las tablas astronómicas y la invención de los instrumentos astronómicos”

Sa'id al-Andalusí, Kitab Tabaqat, pags 154, 155

Aunque es conocido como astrónomo y constructor de instrumentos astronómicos, traemos aquí a Azarquiel, no solo por ser probablemente el mayor talento de su época, sino además por la gran originalidad y complicación de alguno de los modelos matemáticos en los que se basan sus modelos astronómicos.

A la taifa de Toledo accedió en 1043 como gobernante al-Mam'un (nacido en Córdoba en fecha desconocida, falleció en Córdoba en

1075 envenenado, después de haber conquistado la ciudad). Su nombre podría ser en recuerdo del califa de Bagdad. Durante su reinado florecieron las artes y la cultura y a la ciudad acudieron sabios de al-Ándalus, sobre todo, relacionados con la astronomía, convocados por el mecenazgo del rey y de su cadí Ibn Sa'íd al-Andalusí. En este ambiente surge el personaje llamado Abu Ishaq Ibrahim Ibn Yahya al-Naqqas al-Zarqalluh o al-Zarqiyal, llamado Azarquiel, que nació probablemente el año 1030, no se sabe si en Córdoba, de donde era su padre, o bien en Toledo, donde trabajó y labró su fama durante muchos años, hasta que antes de que Alfonso VI tomase la ciudad en 1085, se trasladó a Córdoba, donde murió en el año 1100. Tal y como dice la cita del cadí Sa'íd, que fue su mecenas, Azarquiel era cincelador, se dedicaba, parece que, en el taller de su padre, a tareas de fundición de metales. Probablemente el grupo de científicos reunidos en torno al cadí Sa'íd encargase la construcción de instrumentos al taller donde trabajaba y, ante la buena calidad de sus productos, decidieron contratarle. Pero el cincelador se mostró mucho más inteligente de lo que requeriría su oficio y, gracias a los medios de los que disponía el grupo y a su propio genio e interés, llegó a ser el líder de todos ellos y hoy se le tiene por uno de los mayores astrónomos ya no solo medievales, sino de toda la historia de la Astronomía Española (Claret, 2005).

Su apodo Azarquiel, una de las múltiples latinizaciones de al-Zarqiyal, parece que hace referencia a su pelo rojizo o/y a sus ojos azulados. Fue también conocido como constructor de otros artilugios, por ejemplo, se habla de una clepsidra con dos estanques que construyó a orillas del Tajo en las afueras de Toledo, que se “llenaban de agua o se vaciaban del todo según el creciente y menguante de la luna”, según relató al-Zuhrí, geógrafo granadino (Dorce, 2008). Pero el motivo de su fama son sus obras como astrónomo y matemático destacado, Copérnico lo cita hasta en cinco ocasiones en su *De Revolutionibus*. Se sabe que publicó varios tratados, las *Tablas de Toledo*, de las que es coautor, junto con el conjunto de astrónomos liderados por el cadí Sa'íd. El *Almanaque*, donde se recogen tablas para ciclos periódicos de los planetas. El *Tratado sobre las Estrellas fijas*, en el que se incluyen los modelos matemáticos que justificarían las observaciones que él mismo lideró y las diferencias que se apreciaban con las realizadas con anterioridad. En su *Tratado sobre el movimiento del sol*, obra perdida, aunque se ha podido establecer bastante bien su contenido (Toomer, 1969, citado por Samsó, 1992), se

hace eco de su descubrimiento del movimiento del apogeo solar. Publicó además tres obras sobre otros tantos instrumentos de observación astronómica, el *Tratado sobre la esfera armilar*, obra perdida, que se ha conocido gracias a ser incluida en la obra alfonsí: *Libro de las Armellas*; el *Tratado sobre la lámina de los siete planetas*, es el texto Alfonsí que recoge la traducción de dos tratados escritos por Azarquiel sobre un nuevo instrumento de su invención, el ecuatorio. El tratado incluye información sobre su construcción y sobre su uso. El último de los instrumentos creados por él y sin duda, por el que mayor reconocimiento adquirió es la Azafea, una especie de astrolabio universal, que, en dos versiones diferentes, son descritas en el *Tratado de la Azafea*. También es autor de una obra de menor dimensión dedicada a los cuadrados mágicos de órdenes 3 a 9, asociando cada uno de ellos a uno de los siete planetas visibles: Saturno, Júpiter, Marte, Sol, Venus, Mercurio y Luna (Comes y Comes, 2009).

4.4. La obra perdida de Ibn Sayyid

De este autor se tiene conocimiento a partir de algunos comentarios que han aparecido en obras de su discípulo Ibn Bayya (Avempace), según ha puesto de manifiesto Djebbar (1986, 1992). Según estas noticias, habría desarrollado nuevos métodos de análisis de curvas no cónicas, probablemente polinómicas. Para ello, según también indica Bouzari (2009), habría empezado por estudiar las curvas que se generan al cortar superficies cónicas y no cónicas, concluyendo que se trata de curvas alabeadas. Posteriormente proyectaría esas curvas alabeadas sobre un plano y pasaría a estudiar las propiedades de estas nuevas curvas planas. De lo que deducen Djebbar y Bouzari, del texto de Ibn Bayya, quizás Ibn Sayyid habría intentado caracterizarlas por algo que hoy podríamos decir que fuese su grado (del polinomio). En un texto del propio Ibn Bayya aparece un ejemplo de estas nuevas curvas, así como la relación con su eje, su lado derecho y la ordenada en el origen.

Ibn Sayyid habría aplicado esta teoría a la generalización del problema de las dos medias proporcionales a más de dos, de modo similar a como se utiliza la intersección de dos cónicas para resolver el caso de las dos medias. Ibn Bayya manifestó su intención de retomar el trabajo de su maestro y mejorarlo en lo posible, pero no hay constancia de que eso se llegase a producir (Bouzari, 2009).

Djebbar (2003) pág 101, se hace eco de una epístola escrita por Ibn Sayyid y reflejada por Ibn Mun'im en la que se ocuparía de la suma de series numéricas, lo que indicaría que los trabajos de Ibn Qurra eran

conocidos en al-Ándalus, donde existiría tradición en la investigación en teoría de números y que nuestro autor se habría interesado y profundizado en ello.

5. Las matemáticas andalusíes en el siglo XII

No tiene continuidad durante este siglo la aparición de talentos como los que vivieron durante el siglo anterior además surge una tendencia de fuerte oposición al sistema ptolemaico por mostrarse cada vez más artificioso. Un grupo de matemáticos y filósofos son prueba de ello, como Yabir Ibn Aflah, Ibn Sayyid, Avempace o Maimónides, especialmente el primero, se muestran muy críticos con él. Junto a esta corriente, subsisten seguidores de Azarquiel, que continúan su trabajo y desarrollan mejoras a algunos de los trabajos del maestro. Con todo ello aparece, tras el establecimiento de los almorávides, una tendencia de los científicos a abandonar al-Ándalus, atraídos por los nuevos señores y centros de poder en el Norte de África.

5.1. La crítica a Ptolomeo

Sobre la biografía del matemático Yabir Ibn Aflah se sabe apenas que nació en Sevilla a mediados del siglo XII (se dan como fechas 1100-1160), pero su obra más conocida, *Ilah al-Mayisti* (*corrección del Almagesto*), sí fue ampliamente reconocida en Europa, debido a la traducción que de ella realizó Gerardo de Cremona, y en Oriente, pues fue dada a conocer por Maimónides y también se han recuperado copias de la obra realizadas en Damasco. En la web de la Real Academia de la Historia se puede encontrar un amplio artículo sobre la vida y obra de Yabir Ibn Aflah firmado por Julio Samsó Moya.

En el *Ilah* critica los modelos ptolemaicos de Venus y Mercurio, de los que demuestra que han de sufrir tránsitos entre la tierra y el sol, al contrario de lo requerido por el modelo clásico. También critica la posición del centro del deferente entre el centro del universo y el centro del ecuante, lo cual Ptolomeo lo asume como postulado y Ibn Aflah lo refuta.

El contenido matemático del *Islah* incluye buena parte de los teoremas demostrados por Ibn Mu'ad, del que es continuador, de hecho, el nombre del Teorema de Geber es la latinización de Yabir, así pues, el discípulo dio nombre al teorema demostrado por el maestro. La aceptación de este texto también favoreció el conocimiento de la del cadí de Jaén.

En el terreno de la observación astronómica, Yabir Ibn Aflah diseñó un nuevo instrumento que consta de una armilla, un cuadrante y una regla, simplificando el instrumental que en su opinión debería haber utilizado Ptolomeo. Este instrumento, al que su autor no dio nombre alguno podría ser el precursor del torquetum, de tradición europea.

5.2. La física aristotélica

En este siglo se impone la crítica al sistema ptolemaico por considerarlo excesivamente artificial, pero esta crítica, salvo en el caso de Ibn Aflah, parte del campo de la filosofía. Varios sabios de esta época forman una saga en torno a Ibn Bayya (Avicena), quien, como ya se ha dicho, tiene formación matemática, empezando por su discípulo Ibn Tufayl, maestro a su vez de Ibn Rushd y de al-Bitruyí. Todos ellos coinciden en reclamar un retorno a la física aristotélica, en la que no hay más movimientos que el circular, sea centrípeto o centrífugo y siempre en torno a un centro. Todo el sistema de Ptolomeo con ecuantas, deferentes epiciclos, etc, es eficaz para hacer previsiones astronómicas, pero es irreal; ellos quieren volver a un sistema en el que solamente haya esferas.

Según Maimónides, Ibn Bayya concibió un sistema con esferas excéntricas, pero lo critica porque vuelve a lo mismo. También parece que Ibn Tufayl propuso un sistema prescindiendo de excéntricas y de epiciclos, pero finalmente no lo reflejó en ninguna obra.

Ibn Rushd (Averroes) muestra una evolución, en una primera etapa sigue a Ptolomeo, aunque con ciertas reticencias que le llevan a argumentar, y luego rechazar, que la tierra efectúa un giro de 360° en un día. Finalmente plantea un sistema con un motor para cada uno de los movimientos característicos de los planetas, lo que lleva 37 motores más otros ocho para el movimiento diurno de las esferas y propone además que no tiene por qué haber un mismo centro para todas ellas. En su segunda etapa abandona los epiciclos e introduce la idea (que no es original) de que el movimiento de las esferas se debe al movimiento de la más exterior que se transmite a las inferiores y que el movimiento en longitud es un retraso del movimiento principal. También propone que, dado que los movimientos son continuos y que el sol no sale siempre en el mismo punto, esa evolución es también continua, lo que conduce a un movimiento en espiral, tanto Averroes como al-Bitruyí argumentan esta conclusión basándose en citas originales de Aristóteles.

6. Las matemáticas en el reino nazarí

Tras la batalla de las Navas de Tolosa en 1212, termina el poder almohade y el territorio musulmán en la península ibérica se unifica en el reino de Granada, aunque con vasallaje al reino Castilla.

Durante esta etapa, a pesar del esfuerzo realizado por Alfonso X para atraer a los sabios a Toledo, salvo los casos conocidos de Bernardo el Árabe y de al-Riquti –que finalmente también emigraría a Granada-, la mayoría de ellos optan por asentarse en Granada o pasar directamente a África, fundamentalmente Túnez y Marruecos, lo que se traduce en un mayor esplendor científico en estas zonas. En la zona cristiana, la herencia de la ciencia andalusí pervive en algunos sabios judíos.

6.1. Al-Qalasadí

Abu al-Hasan Ali bin Mohammed bin Ali al-Qurashi al-Basti es sin duda el mayor talento matemático de toda la etapa nazarí. Nació en Baza en 1412, tras una formación inicial en su localidad natal, continuó estudios de filosofía, ciencia y leyes en Granada. A la edad de unos 25 años inicia un viaje que le llevará por madrasas del norte de África hasta el Cairo. En Tremecén (Argelia) permaneció un tiempo para estudiar aritmética según la tradición árabe. Cuando regresó a Baza, ya con cuarenta años, en plena madurez, se dedicó también a la enseñanza. Según sus discípulos era docto en matemáticas, aritmética, ciencia de partición de herencias, astronomía, recitación, comentario coránico o lengua árabe. Finalmente, ante el avance de las tropas cristianas, abandonó Granada para volver a Tremecén y finalmente a Bugía (Túnez), donde murió en 1486.

Su obra es abundante, se le conocen doce obras de aritmética y álgebra, pero su aportación original en matemáticas no lo es tanto (Samsó, 1992). Djebbar (2008) analiza las influencias recibidas en su obra y concluye que hay poco original, pero tiene gran valor en la transmisión de esos conocimientos en al-Ándalus y el Magreb. Se le conocen estudios en fracciones continuas, es precursor en el análisis de las raíces de una ecuación, trabajó en determinar sumas de cuadrados y de cubos y calculó raíces cuadradas mediante aproximaciones sucesivas, pero quizás su aportación más valorada ha sido la popularización en el álgebra de una notación simbólica que de un modo incipiente se había ido desarrollando con anterioridad en Oriente:

- و (wa) que significa "y" para la suma (+)
- لا (illa) que significa "menos" para la resta (-)
- ف (fi) que significa "vez" para la multiplicación (*)
- ة (ala) que significa "sobre" para la división (/)
- ج (yīm) representa "yidr" que significa "raíz"
- ش (sh) representa "xay" que significa "cosa" para una variable (x)
- م (m) representa "mal" para un cuadrado (x^2)
- ك (k) representa "kab" para el cubo (x^3)
- ل (l) representa "yadilu" para igualdad (=)

Por ejemplo, la ecuación $2x^3 + 3x^2 - 4x + 5 = 0$ se escribiría con su notación como:

ل 0 5 و ش 4 لا م 3 و ك 2

7. A modo de epílogo

Hasta aquí los logros de los matemáticos andalusíes más reconocidos, no obstante, hay constancia de otros matemáticos y otra matemática que han quedado en el arte, cuando han subsistido a una época tan violenta como aquella. Me refiero a la geometría decorativa y más concretamente a los mosaicos árabes andalusíes, cuyo mayor exponente se encuentra en la Alhambra. Recientemente hay bastantes estudios sobre teselación y grupos en relación a ellos: Pérez (2004) proporciona una revisión muy completa de todas las isometrías presentes en los mosaicos granadinos. Marcus du Sautoy, divulgador oficial de la Universidad de Oxford es un entusiasta enamorado de la belleza de estos mosaicos, como puede verse en cualquiera de sus obras, tanto científicas como de divulgación y en cualquier soporte, valga como ejemplo el video que dedica a las simetrías de la Alhambra que se puede apreciar en el sitio web de TED (Tecnología, Entretenimiento, Diseño) y que recomiendo encarecidamente visitar al lector de estas líneas.

https://www.ted.com/talks/marcus_du_sautoy_symmetry_reality_s_riddle/transcript

8. Bibliografía

- Alcalá, A. 2017. *La Alquimia en al-Ándalus*. Editorial Almuzara, colección al-Andalus.
- Bouzari, A. 2009. “Les coniques en occident musulman entre le XIe et le XVe siècle”. *Llul*, 32: 233-255.
- Cahen, C. 1986. *El Islam, desde los orígenes hasta el comienzo del Imperio Otomano*. Siglo XXI, México.
- Claret, A. 2005. *Azarquiel y otras historias. La astronomía en al-Andalus*. CSIC -Instituto de Astrofísica de Andalucía (IAA). Disponible en <http://hdl.handle.net/10261/96259>. Última visita Abril 2019.
- Comes, M, Comes, R. 2009. “Los cuadrados mágicos en al-Ándalus. El tratado de Azarquiel”. *Al-Qantara*, XXX 1:137-169.
- Djebbar, A. 1984. “Deux Mathématiciens peux connus de l’Espagne du XIe siècle: Al Mu’taman e Ibn Sayyid”. *Colloque International sur les Mathématiques autour de la Méditerranée jusqu’au XVIIIe siècle*. Marseille-Lumny.
- Djebbar, A. 1986. “La contribution Matématique d’al-Mutaman et son influence au Maghreb”. *Colloque Maghrebin de Beit al Hikma sur le patrimoine scientifique arabe*. Cartago.
- Djebbar, A. 1988. “Quelques aspects de l’Algebre dans la tradition mathématique arabe de l’Occident Musulman”. *Premier Colloque International d’Alger sur l’Histoire des Mathématiques Arabes*. Argel.
- Djebbar, A. 1990. *Mathématiques et mathématiciens dans le Maghreb medieval (IXe-XVIIIe siècles)*. Contribution à l’étude des activités scientifiques de l’Occident musulman. Tesis doctoral, Universidad de Nantes.
- Djebbar, A. 1992. “Las matemáticas en al-Andalus a través de las actividades de tres sabios del siglo XI”. *El legado científico andalusí*. Madrid, Centro Nacional de Exposiciones.
- Djebbar, A. 1997. “La rédaction de L’istikmal d’al-Mu’taman (XIe s.) par Ibn Sartaq, un mathématicien des XIIIe-XVe siècles”. *Historia Mathematica*, 24: 185-192.
- Djebbar, A. 1999. “Les livres arithmétiques des éléments d’Euclide dans le traité d’Al-Mu’taman du XIe siècle”. *Llul*, 22: 589-653.
- Djebbar, A. 2003. “Les activités mathématiques in al-Andalus et ses prolongements au Maghreb (IXe-XVe siècles)”. In: *Bernat Lopez y*

- R. Puig Aguilar (eds.) *Actes de la VII Trobada d'Historia de la Ciència i de la Tècnica*. Barcelona, SCHCT, 87-112
- Djebbar, A. 2008. "Al-Qalasdi". In: Selin H. (eds) *Encyclopaedia of the History of Science, Technology and Medicine in Non-Western Cultures*. Springer, Dordrecht.
- Dorce, C. 2008. *Azarquiel. El astrónomo andalusí*. Editorial Nivola. Madrid.
- Escribano, M. C. 2000. "El matemático y astrónomo andalusí Maslama el Madrileño". En: *Matemáticos madrileños*. Anaya, Madrid.
- Hairetdinova, N.G. 1986. "On spherical trigonometry in the medieval near east and in Europe. *Historia Mathematica*", 13(2):136-146.
- Hogendijk, J. P. 1986. "Discovery of an 11th-century geometrical compilation: The Istikmal of Yusuf al-Mu'taman Ibn Hud, King of Saragossa". *Historia Mathematica*, vol 13: 43-52.
- Hogendijk, J. P. 1994. "Four construction of two mean proportionals between two given lines in the Book of Perfection of al-Mu'taman Ibn Hud". *Journal for the History of Arabic Science*, 10(1-2), 1992-93-94:13-29.
- Hogendijk, J. P. 1995. "Al-Mu'taman ibn Hud, 11th century King of Saragossa and brilliant Mathematician". *Historia Mathematica*, 22: 1-18.
- Hogendijk, J. P. 2004. "The lost geometrical parts of the Istikmal of Yusuf al-Mu'taman ibn Hud (11th century) in the redaction of Ibn Sartaq (14th century): An analytical table of contents". *Archives internationales d'Histoire des Sciences*, 53:19-34.
- Martos Quesada, J. 2001. "Los estudios sobre el desarrollo de las matemáticas en al-Andalus: estado actual de la cuestión". *DYNAMIS. Acta Hisp. Med. Sci. Hist. Illus*, 21: 269-293.
- Martos Quesada, J. y Escribano Ródenas, M.C. 2008: "Vida y obra del matemático giennense del siglo XI Ibn Mu'ad", en *Boletín. Instituto de Estudios Giennenses Julio/Dicbre*, 198:117-137.
- Moreno Castillo, R. 1998. "La matemática en Bagdad". *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores*, 49: 53-67. Madrid.
- Moreno Castillo, R. 2009, (traducción, introducción y notas). *El libro del Álgebra. Mohammed-ibn-Musa al-Jwarizmi*. Editorial Nivola, Colección epistème/8. Madrid.
- Moreno Castillo, R. 2010a. *Al-Jwarizmi. El algebrista de Bagdad*. Editorial Nivola, Madrid.

- Moreno Castillo, R (Trad.). 2010b. Compendio del arte del cálculo. Ed. Nivola, colección epistème/4. Madrid.
- Pérez, R. 2004. “Un matemático pasea por la Alhambra”. En *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño*, págs. 81-94. Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Subdirección General de Información y Publicaciones.
- Pizarro Alcalde, F., Baena Recio, M. A. 2012. *El legado árabe en Al-Ándalus y Europa Occidental: Las Matemáticas. Materiales para la educación secundaria*. Bubock Publishing, España.
- Sa'íd al-Andalusí 2000. *Historia de la Filosofía y de las Ciencias o Libro de las Categorías de las Naciones [Kitab Tabaqat al-umam]*. Llaveró Ruiz, E. (Traducción, notas e índices) y Matínez Lorca, A. (Introducción y notas). Editorial Trotta. Madrid.
- Samsó, J. 1992. *La ciencia de los antiguos en al-Ándalus*. Madrid, Mapfre.
- Samsó, J. 2003. “La ciencia árabe islámica y su papel”. *Revista de libros segunda época*. Nº 75. Disponible en https://www.revistadelibros.com/articulo_imprimible_pdf.php?art=2877&t=articulos Última visita 18 marzo 2019.
- Samsó, J. “Yabir b. Aflah”. En *Real Academia de la Historia, Diccionario Biográfico electrónico* (en red, www.rah.es):DB~e. Disponible en: <http://dbe.rah.es/biografias/10642/yabir-b-aflah>. Último acceso, abril 2019.
- Sánchez Pérez, J.A. 1921. *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España*. Edición facsímil publicada por la Fundación El legado andalusí en 1995.
- Sesiano, J. 2014. *The Liber Mahameleth. A 12th-century mathematical treatise. Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences*. Springer International Publishing Switzerland.
- Schwartz, R. K. 2010. “Al-qibla and the new spherical trigonometry: The examples of al-Biruni and al-Marrakushi”. *Tenth Maghrebian Colloquium on the History of Arabic Mathematics (COMHISMA 10)*. Tunes.
- Toomer, G.J. 1969. “The solar theory of az-Zarqal: A history of errors”. *Centaurus*, xiv, pp 306–336.
- Varela, M. I., Llaneza, A. 1989. *La expansión del Islam*. Anaya, Madrid

- Vernet, J y Catalá, M.A. 1965. "Las obras matemáticas de Maslama de Madrid". *Al-Ándalus: revista de las Escuelas de Estudios Árabes de Madrid y Granada*, 30 (1): 15-45.
- Vernet, J. 1975. *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente*. Barcelona, Ariel.
- Vernet, J.1986. *La ciencia en al-Andalus*. Editoriales Andaluzas Unidas, Sevilla, pp. 28 y ss
- Villuendas, M. V. 1979. *La trigonometría española en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Mu'ad. El Kitab Mayhulat*. Instituto de Historia de la Ciencia de la Real Academia de Buenas Letras. Barcelona.

«Así como el hambre y la sed son señales del cuerpo y muestran lo que le falta, así también la ignorancia y escasez de conocimientos es una señal del alma y de sus creencias. Así las cosas, tenemos aquí dos tipos determinados, a saber: los que sólo buscan sus mantenimientos y los que procuran el saber. Pero la verdadera plenitud sólo se alcanza mediante el objeto que posee el más noble modo de ser. (...) Ahora bien, si por lo común la plenitud de la aprehensión es gozosa, cuando lo que se alcanza es por esencia noble y mayor en verdad y permanencia, forzosamente será la dicha más digna de ser elegida. Tal sucede con la felicidad intelectual respecto de los otros gozos»

Fuente: Averroes: Exposición de la «República» de Platón. Traducción y estudio preliminar de Miguel Cruz Hernández, Tecnos, Madrid, 1996, pp. 146-147.

