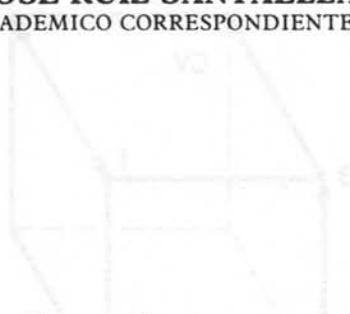
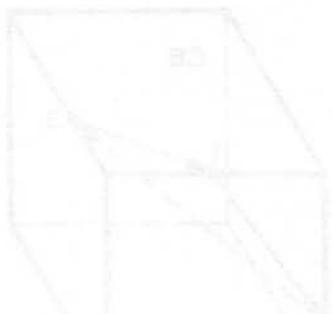


La conmutación como productora de grupos finitos en el cubo de Rubik.

Brac, 116 (117-128) 1989

Por JOSE RUIZ SANTAELLA
(ACADEMICO CORRESPONDIENTE)



El concepto matemático de conmutación, aplicado al cubo de Rubik, consiste en los movimientos de dos caras adyacentes de fórmula $PQP^{-1}F^{-1}$. Así, para las caras adyacentes a (arriba), f (frente) y d (derecha), los giros posibles a realizar son los siguientes:

$AFA^{-1}F^{-1}$	$FDF^{-1}D^{-1}$	$ADA^{-1}D^{-1}$
$A^{-1}F^{-1}AF$	$F^{-1}D^{-1}FD$	$A^{-1}D^{-1}AD$
$AF^{-1}A^{-1}F$	$FD^{-1}F^{-1}D$	$AD^{-1}A^{-1}D$
$A^{-1}F AF^{-1}$	$F^{-1}DFD^{-1}$	$A^{-1}DAD^{-1}$

Los doce giros indicados, forman otros tantos grupos finitos, pues poseen las propiedades: asociativa, neutra y simétrica, que caracteriza a los mismos (Bibliografía: 1 pág. 43-47).

La primera y última propiedad se da en todos los movimientos de las piezas del cubo.

La propiedad neutra, que también se da en los movimientos de las piezas del cubo.

La propiedad neutra, que también se da en los movimientos de las piezas del cubo, la demostraremos viendo que la repetición de la fórmula, que origina los movimientos, conduce siempre al punto de partida (posición original).

Veamos los doce giros indicados, y en gráficos, los movimientos de las distintas piezas del cubo.

La aplicación de la fórmula $AFA^{-1}F^{-1}$ origina los movimientos que se ven en la figura 1.

El gráfico de la izquierda indica el movimiento de los cubos vértices (CV) números 1, 2, 3 y 4. Como vemos los cubos 1 y 2, 3 y 4 intercambian entre sí, estos movimientos se realizan sin giro.

La figura de la derecha indica los movimientos de los cubos

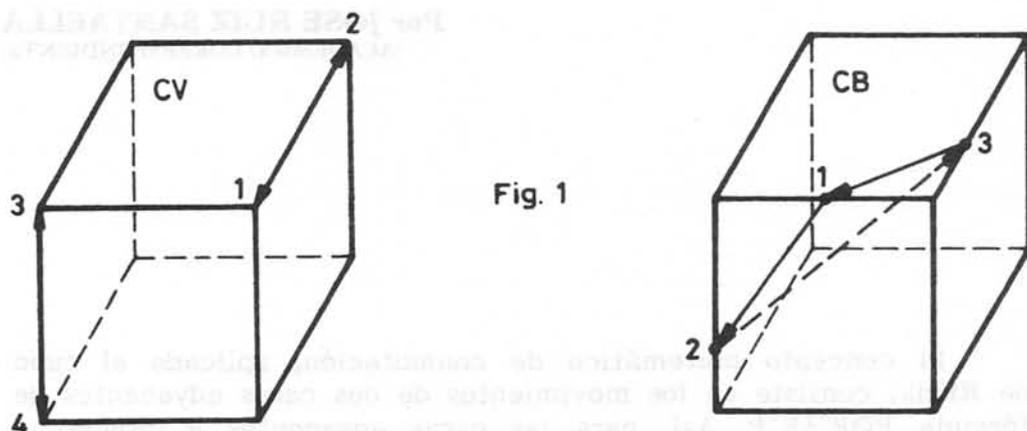


Fig. 1

bordes (CB) y vemos que la pieza 1 se va a la 2, la 2 a la 3 y la 3 a la 1, realizando por ello un movimiento horario (mirado desde arriba). En éstos movimientos la pieza 2 gira y las piezas 1 y 3 no giran en sus desplazamientos.

Los movimientos de las distintas piezas, al repartir las fórmulas, son:

1F CV intercambian números 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en su sitio, girados $1/3$ a la derecha (positivo, horario).

3 y 4 en su sitio, girados $1/3$ a la izquierda (negativo, antihorario).

CB 1 al 3, 2 al 1, 3 al 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios correctos.

4F CV 1 y 2 en su sitio, girados $2/3$ a la derecha (positivo, horario).

3 y 4 en su sitio, girados $2/3$ a la izquierda (negativo, antihorario).

CB 1 a 2 a 3 a 1.

5F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1 al 3, 2 al 1, 3 al 2.

6F CV 1, 2 y 3 en sus sitios correctos.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios correctos.

Se obtiene el cubo original. Punto de partida.

Observaciones:

La repetición 2F indica que los CV para volver a su sitio tenemos que llegar a 6F.

En cuanto a los CB la repetición 3F los lleva a su sitio, y lo mismo sucederá con sus múltiplos 6F, 9F, 12F...

De aquí se deduce que el grupo finito que forman los CV exige 6F para llevar todos los CV al origen, mientras que el grupo finito de los CB sólo exige 3F para llevarlos a su punto de partida.

La aplicación de la fórmula $A^{-1}F^{-1}AF$ origina los movimientos que se ven en la figura 2.

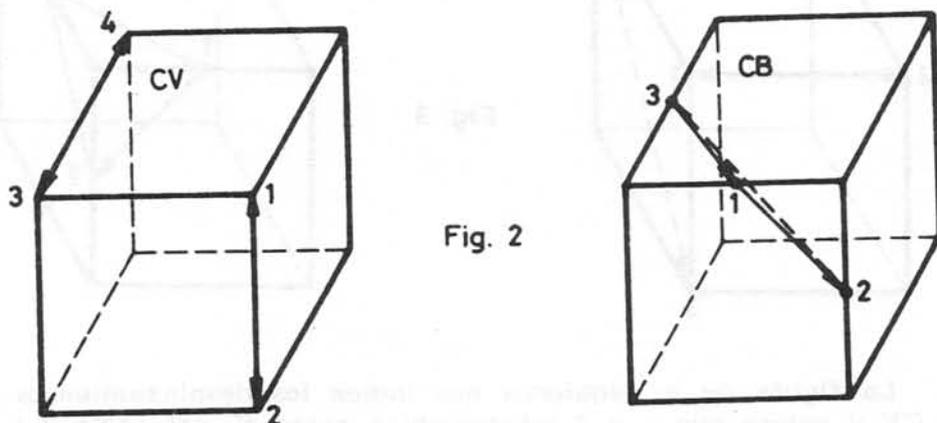


Fig. 2

La figura de la izquierda representa los movimientos de los CV y como vemos el 1 intercambia con el 2 y el 3 con el 4. En ambos movimientos no giran ninguno de los CV que en ellos intervienen.

La figura de la derecha indica el movimiento de los CB, 1, 2 y 3 que hacen sus desplazamientos en sentido antihorario (visto desde arriba). En estos movimientos la pieza 2 gira y las piezas 1 y 3 no giran.

Los movimientos de las piezas, al repetir la fórmula, son:

1F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

·CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en su sitio, girados $1/3$ a la derecha.

3 y 4 en su sitio, girados $1/3$ a la izquierda.

CB 1 al 3, 2 al 1, 3 al 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en su sitio y correctos.

Vemos que obtenemos resultados semejantes a los obtenidos en el primer ejemplo. Por tanto, con $6F$ volverán todos los CV a su sitio de partida y quedarán correctamente colocados. Los CB con $3F$, $6F$, $9F$... estarán todos en su sitio y correctamente colocados.

No repetimos los movimientos, que hemos hecho nosotros. El lector podrá comprobarlo por su cuenta.

La aplicación de la fórmula $AF^{-1}A^{-1}F$ origina los movimientos que se ven en la figura 3.

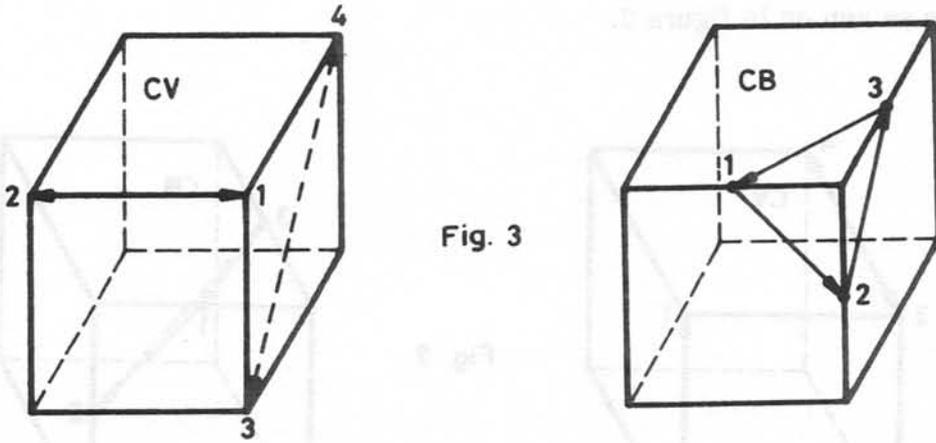


Fig. 3

La figura de la izquierda nos indica los desplazamientos de los CV y vemos que 1 y 2 intercambian entre sí, así como 3 y 4. En estos intercambios las piezas 1 y 2 no giran mientras que las piezas 3 y 4 giran ambas (giros en desplazamiento diagonal).

La figura de la derecha nos indica que los CB que desplazan así 1 a 2, 2 a 3, 3 a 1, en sentido antihorario. En estos desplazamientos solo gira la pieza 2 y las piezas 1 y 3 no giran.

Los movimientos de las piezas, al repetir la fórmula, son:

1F CV 1 y 2 se intercambia, así como 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.

3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

CB 1 al 3, 2 al 1, 3 al 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

Vemos que obtenemos resultados semejantes a los ejemplos anteriores.

Por tanto, con 6F volverán todos los CV a sus sitios de partida y estarán correctamente colocados. Los CB con 3F y 6F quedarán colocados y correctos.

La aplicación de la fórmula $A^{-1}FAF^{-1}$ origina los movimientos que se ven en la figura 4.

La figura de la izquierda nos indica los desplazamientos de los CV 1, 2, 3 y 4. En los que 1 y 2 intercambian entre sí, así como 3 y 4. En estos intercambios las piezas 1 y 2 no giran mientras que las piezas 3 y 4 giran (giros en desplazamientos en diagonal).

La figura de la derecha indica los desplazamientos de los CB 1, 2, y 3 que en conjunto hace un desplazamiento horario (visto desde arriba). En estos desplazamientos solo gira la pieza 2 mientras que las piezas 1 y 3 no giran.

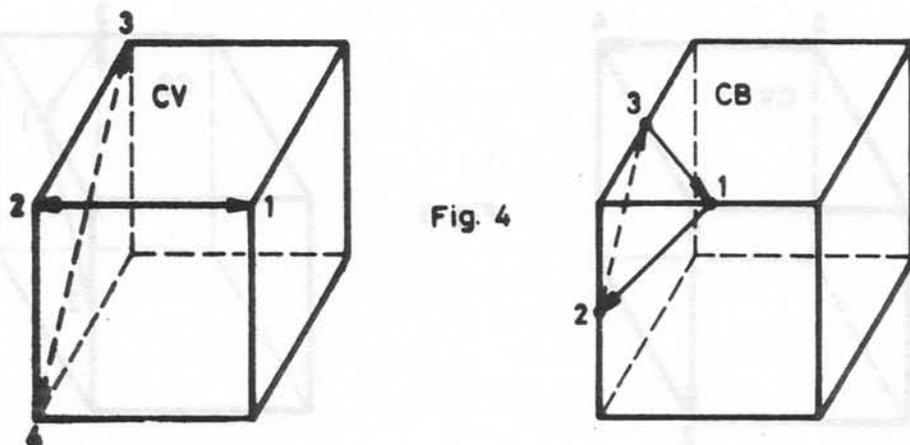


Fig. 4

Los movimientos de las piezas, al repetir la fórmula, son:

- 1F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.
 CB 1 a 2 a 3 a 1.
 2F CV 1 y 2 en su sitio, girados $1/3$ a la izquierda.
 3 y 4 en su sitio, girados $1/3$ a la derecha.
 CB 1 al 3, 2 al 1 y 3 al 2.
 3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.
 CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios correctos.

La repetición 3F lleva todos los CB a sus sitios y quedan colocados correctamente.

Nuevamente 3F es lo que necesita el grupo finito que forman los CB en sus desplazamientos, para volver al punto de partida.

Lo mismo, para obtener el punto de partida de todos los CV se necesita llegar a 6F.

La aplicación de la fórmula $ADA^{-1}D^{-1}$ origina los movimientos que se ven en la figura 5.

La figura de la izquierda nos da los desplazamientos de los CV 1, 2, 3, 4, de tal modo, que el 1 intercambia con el 2 y el 3 lo hace con el 4. En estos intercambios ninguna de las piezas giran.

La figura de la derecha nos indica los desplazamientos de los CB 1, 2, 3, que lo hacen en sentido horario (visto desde arriba). En estos desplazamientos sólo gira la pieza 2 mientras que las piezas 1 y 3 no giran.

Los movimientos de las piezas al repetir la fórmula, son:

- 1F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.
 CB 1 a 2 a 3 a 1.
 2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

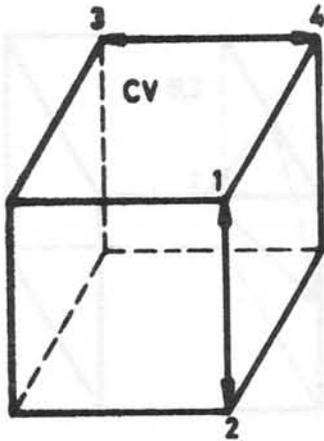
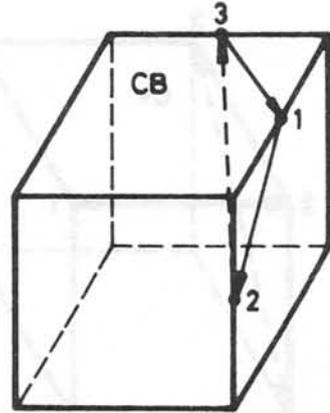


Fig. 5



3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.
 CB 1 al 3, 2 al 1, 3 al 2.
 3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.
 CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

Los cuatro primeros gráficos, que obtuvieron con los giros de las caras a (arriba) y f (frente) del cubo.

Los giros de esta fórmula, y de las tres que van a seguir, se refieren a las caras a (arriba) y d (derecha) del cubo.

A pesar de girar ahora otras caras, se obtiene el mismo resultado. Se necesitan 6F para llevar los CV a sus sitios y situarlos correctamente. Por el contrario, con 3F se llevan los CB a sus sitios y quedan correctamente.

Nuevamente los grupos finitos originados por los movimientos de los CV y los CB necesitan repeticiones distintas para llevarlos a su punto de partida.

La aplicación de la fórmula $A^{-1}D^{-1}AD$ origina los movimientos que se indican en la figura 6.

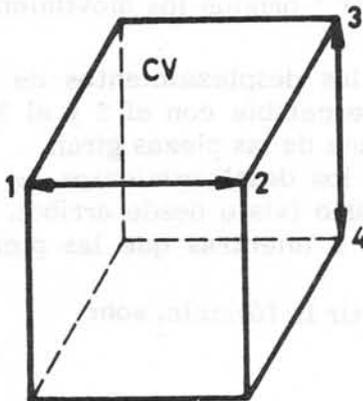
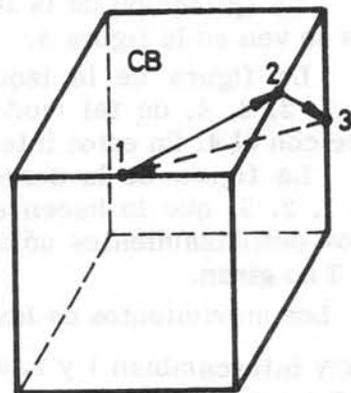


Fig. 6



La figura de la izquierda indica movimientos de los CV 1, 2, 3, y 4 y vemos que 1 intercambia con el 2 y el 3 con el 4. En estos intercambios ninguna pieza gira.

La figura de la derecha nos indica los desplazamientos de los CB 1, 2, 3, que realizan un desplazamiento antihorario (visto desde arriba). En estos desplazamientos la pieza 3 gira y las piezas 1 y 2 no.

Los movimientos de las piezas, al repetir la fórmula, son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.

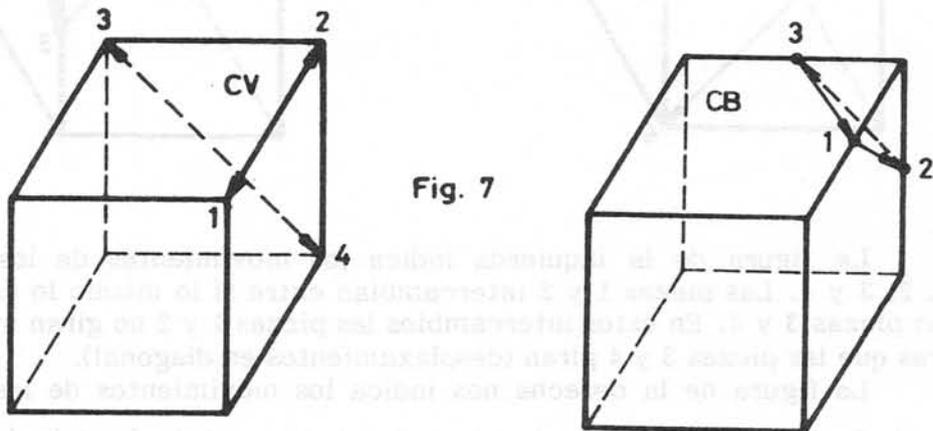
CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios correctos. La repetición 3F lleva todos los CB a sus sitios y quedan en posición correcta.

La aplicación de la fórmula $AD^{-1}A^{-1}D$ origine los movimientos que se indican en la figura 7.



La figura de la izquierda indica los desplazamientos de los CV 1, 2, 3, 4, en el que vemos que 1 y 2 intercambian así como 3 y 4. En estos intercambios las piezas 1 y 2 no giran mientras que las piezas 3 y 4 giran (desplazamientos en diagonal).

La figura de la derecha indica los movimientos de los CB 1, 2, 3, que lo hacen en sentido antihorario (visto desde arriba). En estos desplazamientos la pieza 2 gira y las piezas 1 y 3 no giran.

Los movimientos de las piezas al repetir la fórmula son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como, entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en su sitio, girados $1/3$ a la derecha.

3 y 4 en su sitio, girados $1/3$ a la izquierda.

CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios y correctos. La repetición 3F lleva todos los CB a sus sitios y quedan en posición correcta.

La aplicación de la fórmula $A^{-1}DAD^{-1}$ origina los movimientos que se indican en la figura 8.

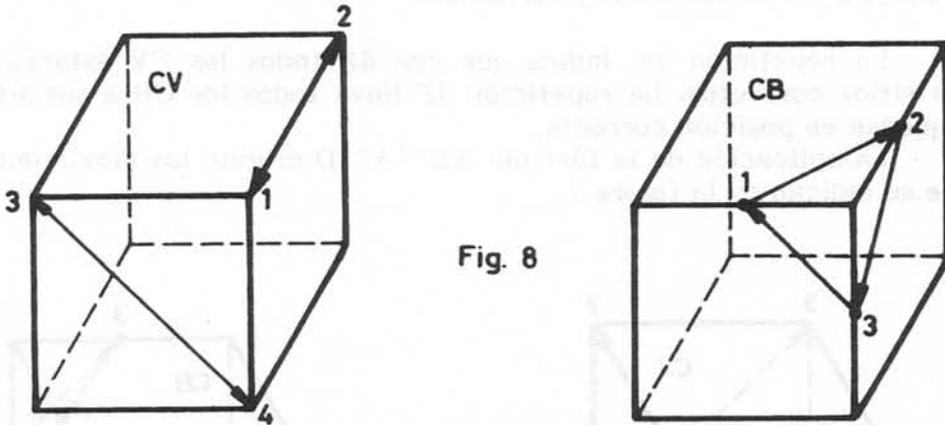


Fig. 8

La figura de la izquierda indica los movimientos de los CV 1, 2, 3 y 4. Las piezas 1 y 2 intercambian entre sí lo mismo lo hacen las piezas 3 y 4. En estos intercambios las piezas 1 y 2 no giran mientras que las piezas 3 y 4 giran (desplazamientos en diagonal).

La figura de la derecha nos indica los movimientos de los CB 1, 2, 3. Este desplazamiento tiene lugar en sentido horario (visto desde arriba). En este desplazamiento las piezas 1 y 2 no giran y la pieza 3 gira.

Los movimientos más interesantes, al repetir la fórmula, son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.

CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F lleva todos los CB a sus sitios y en posición correcta.

La aplicación de la fórmula $FDF^{-1}D^{-1}$ origina los movimientos que se indican en la figura 9.

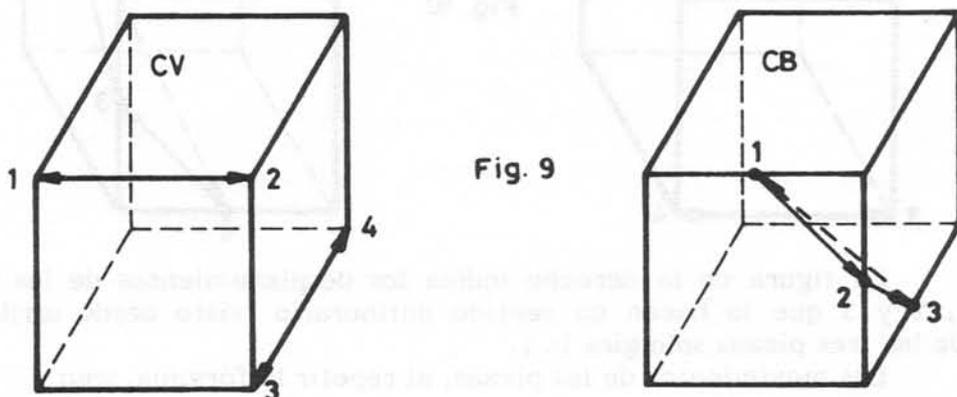


Fig. 9

La figura de la izquierda nos indica los movimientos de los CV 1, 2, 3 y 4. Los 1 y 2 intercambian entre sí, así como los 3 y 4. En estos intercambios no giran ninguna de las piezas.

La figura de la derecha indica los desplazamientos de los CB 1, 2 y 3 que se desplazan en sentido antihorario (visto desde arriba). En estos movimientos las piezas 1 y 2 no giran y la pieza 3 gira.

Los movimientos de las piezas al repetir la fórmula son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitio, girados $1/3$ a la derecha.

3 y 4 en sus sitio, girados $1/3$ a la izquierda.

CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios incorrectos.

La repetición 2F lleva todos los CB a sus sitios y en posición correcta.

La aplicación de la fórmula $F^{-1}D^{-1}FD$ origina los movimientos que se indican en la figura 10.

La figura de la izquierda nos refleja los movimientos de los CV 1, 2, 3 y 4. Como vemos las piezas 1 y 2 intercambian entre sí lo mismo que las piezas 3 y 4. En estos intercambios no gira ninguna pieza.

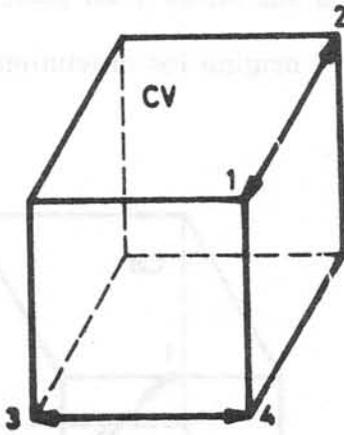
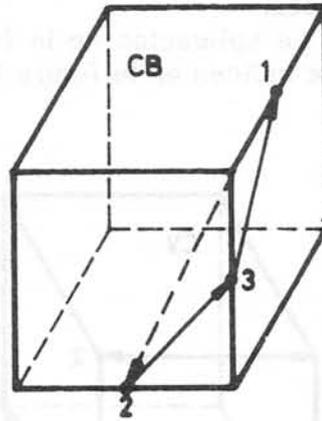


Fig. 10



La figura de la derecha indica los desplazamientos de los CB 1, 2 y 3 que lo hacen en sentido antihorario (visto desde arriba). De las tres piezas sólo gira la 1.

Los movimientos de las piezas, al repetir la fórmula, son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.

3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios y correctos.

La repetición 3F lleva todos los CB a sus sitios correspondientes.

La aplicación de la fórmula $FD^{-1}F^{-1}D$ origina los movimientos que se indican en la figura 11.

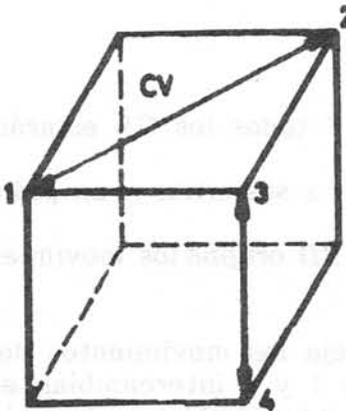
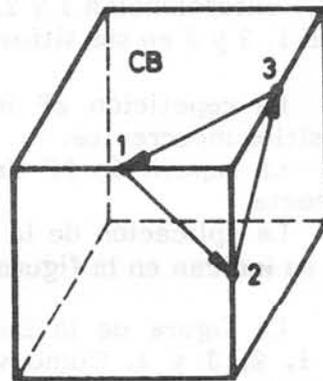


Fig. 11



La figura de la izquierda indica los desplazamientos de los CV 1, 2, 3 y 4. Como vemos los 1 y 2 así como 3 y 4 intercambian entre sí. En estos intercambios las piezas 1 y 2 giran y las piezas 3 y 4 no giran (giros en desplazamiento diagonal).

La figura de la derecha nos indica los desplazamientos de los CB 1, 2 y 3 que lo hacen en sentido antihorario (visto desde arriba). En estos desplazamientos solo gira la pieza 3.

Los movimientos de las piezas al repetir la fórmula son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.

CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en sus sitios y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios y correctos.

La repetición 3F lleva todos los CB a sus sitios y en posición correcta.

La aplicación de la fórmula $F^{-1}DFD^{-1}$ origina los movimientos que se indican en la figura 12.

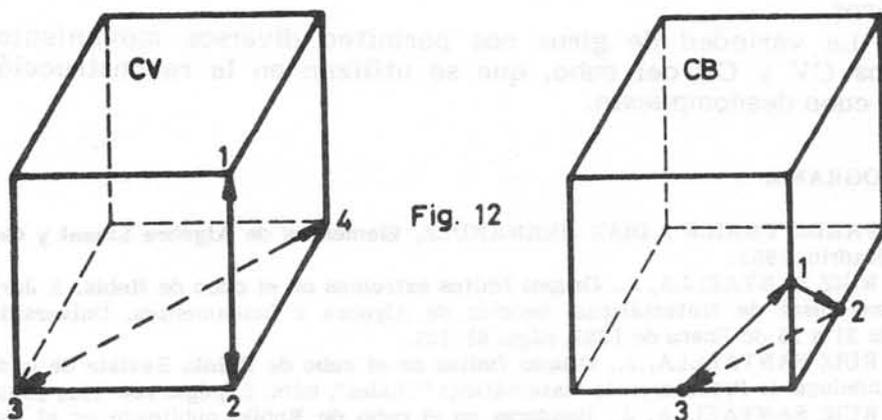


Fig. 12

La figura de la izquierda nos muestra los desplazamientos de los CV 1, 2, 3 y 4. Como vemos el 1 intercambia con el 2 y el 3 con el 4. En estos desplazamientos las piezas 1 y 2 no giran y las piezas 3 y 4 giran (giros en desplazamientos diagonal).

La figura de la derecha indica los desplazamientos de los CB 1, 2 y 3 que lo hacen en sentido antihorario (visto desde arriba). En estos desplazamientos solo la pieza 2 gira.

Los movimientos de las piezas, al repetir la fórmula, son:

1F CV intercambio entre 1 y 2, así como entre 3 y 4.

CB 1 a 2 a 3 a 1.

2F CV 1 y 2 en sus sitios, girados $1/3$ a la izquierda.

3 y 4 en sus sitios, girados $1/3$ a la derecha.

CB 1 a 3, 2 a 1, 3 a 2.

3F CV intercambian 1 y 2, así como 3 y 4.

CB 1, 2 y 3 en su sitio y correctos.

La repetición 2F indica que con 6F todos los CV estarán en sus sitios y correctos.

La repetición 3F lleva todos los CB a sus sitios y en posición correcta.

Los doce giros realizados se refieren a las caras a (arriba), f (frente), y d (derecha), que son las que limitan el CV afd, por el que pasa un eje ternario. Como el cubo tiene cuatro ejes ternarios distintos, estas doce fórmulas, se repetirán cuatro veces por cada uno de los CV que forman la cara a (arriba).

De esta forma tendremos $12 \times 4 = 48$ maneras distintas de giros. Si estos giros los aplicamos a los ejes ternarios de la cara b (abajo) harán $48 \times 2 = 96$ maneras distintas de giros de las caras del cubo, y cada una de ellas, afectará a movimientos diferentes (en cuanto a colorido) de cuatro CV y de tres CB.

Si ahora cambiamos el orden de los giros ($AFA^{-1}F^{-1}$ por $FAF^{-1}A^{-1}$) nos originarán dobles giros, o sea $96 \times 2 = 192$ maneras distintas de giros.

La variedad de giros nos permiten diversos movimientos de los CV y CB del cubo, que se utilizan en la reconstrucción de todo cubo descompuesto.

BIBLIOGRAFIA

PARDO FRAILE y DIAZ HERNANDEZ, **Elementos de Algebra Lineal y Geometría**, Madrid, 1965.

RUIZ SANTAELLA, J., **Grupos finitos extremos en el cubo de Rubik**, X Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas. Sección de Algebra y fundamentos, Universidad de Murcia 21 a 25 de Enero de 1985, págs. 95-101.

RUIZ SANTAELLA, J., **Grupos finitos en el cubo de Rubik**, Revista de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales", núm. 2, págs. 106-121, 1985.

RUIZ SANTAELLA, J., **Banderas en el cubo de Rubik**, publicado en el 'Boletín de la Real Academia de Córdoba, de Ciencias, Bellas Artes y Nobles Letras, año LVII, 1986, núm. 110, págs. 75-87.