Operadores de posición y momento. Representación de coordenadas y de momentos.

En los temas anteriores hemos visto que una partícula no tiene ni posición y momento bien definido. Sin embargo, podemos calcular el valor medio de estas dos magnitudes a partir de la función de onda. Por simplicidad, vamos a considerar el caso de una partícula en una sola dimensión.

Supongamos que la función de onda en un instante determinado viene dada por $\psi(x)$. A partir de ahora esta función la denominaremos función de onda en la representación coordenadas. A partir de esta función podemos calcular la funcion de onda en la representación de momentos $\bar{\psi}(p)$ y ambas funciones nos permiten calcular el valor medio de la posición y del momento de la forma:

$$\begin{aligned}\langle x\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} x\ |\psi(x)|^2\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ x\ \psi(x)\ dx \\ \langle p\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} p\ \left|\bar{\psi}(p)\right|^2\ dp = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^*(p)\ p\ \bar{\psi}(p)\ dp\end{aligned}$$

También vimos que podíamos calcular el valor medio del momento utilizando directamente la función de onda $\psi(x)$, salvo que en este caso tenemos que utilizar un operador $\hat{p}$:

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ \hat{p}\ \psi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\ \psi(x)\ dx$$

Decimos que el momento está representado por un operador. Podemos pensar que el momento en realidad siempre está representado mediante un operador, independientemente de la representación que se utilice para la función de onda, $\psi(x)$ o $\bar{\psi}(p)$. Lo único que ocurre es que la expresión del operador momento es distinta en cada representación. En la representación de momentos el operador $\hat{p}$ actúa multiplicando una función $\bar{\psi}(p)$ por p. Podemos hacer algo similar con la posición. En mecánica cuántica la posición vendrá representada por un operador $\hat{x}$, de modo que en la representación coordenadas este operador actúa multiplicando la función $\psi(x)$ por x. De esta forma podemos expresar el valor medio de la posición como sigue:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ \hat{x}\ \psi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\ x\ \psi(x)\ dx$$

Podemos preguntarnos cómo será el operador $\hat{x}$ en la representación de momentos. Para ello haremos un cálculo similar al que hicimos con el momento. El valor medio de la posición en la representación de momentos será:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\psi}^*(p)\ \hat{x}\ \bar{\psi}(p)\ dp$$

Queremos saber cuál debe ser la expresión del operador $\hat{x}$. Como sabemos cómo actúa el operador x en la representación coordenadas, partiremos de la expresión del valor medio en dicha representación y cambiaremos a la representación de momentos. Partimos de la siguiente expresión:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \psi^* (x)\ \ x\ \psi (x)$$

Vamos a sustituir $\psi^* (x)$ por su expresión en función de $\bar{\psi} (p)$:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp\ \bar{\psi}^* (p)\, e^{-\frac{i}{\hbar}px}}\ \ x\ \psi (x)$$

Reordenamos la expresión colocando en primer lugar la integral en p y la función $\bar{\psi}^* (p)$, que es la única que depende única y exclusivamente de p:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\ \bar{\psi}^* (p)\ \ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ e^{-\frac{i}{\hbar}px}\ \psi (x)}$$

Podemos escribir la integral que hemos marcado con la llave de la siguiente forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ x\ e^{-\frac{i}{\hbar}px}\ \psi (x) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\frac{i}{\hbar}px}\ \psi (x) \right] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \bar{\psi} (p)$$

Por tanto, llegamos a la siguiente expresion:

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\ \bar{\psi}^* (p)\, i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \bar{\psi} (p) = \int_{-\infty}^{\infty} dp\ \bar{\psi}^* (p)\ \ \hat{x}\ \bar{\psi} (p)$$

Es decir, que podemos utilizar la función de onda en la representación de momentos $\bar{\psi} (p)$ para calcular el valor medio de la posición, salvo que en este caso tenemos que utilizar un operador $\hat{x}$, de la forma:

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$$

Diremos que la posición está representada por el operador $\hat{x}$. El hecho es que siempre podemos decir que la posición está representada por un operador, tanto cuando utilicemos la función de onda en la representación coordenadas, $\psi (x)$, como cuando utilicemos la función de onda en la representación de momentos, $\bar{\psi} (p)$. Lo mismo podemos hacer con el momento: siempre estará representado por un operador. En la siguiente tabla se muestra un esquema de la función de onda y de los operadores de posición y momento en las dos representaciones.

Representación	Función de onda	Operador de posición	Operador momento
Coordenadas	$\psi (x)$	$\hat{x} = x$	$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$
Momentos	$\bar{\psi} (p)$	$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$	$\hat{p} = p$

Como se puede apreciar, se puede trabajar en una u otra representación indistintamente con la condición de utilizar los operadores adecuados a la representación que se utilice. En mecánica cuántica todas las variables dinámicas, como son la posición, la cantidad de movimiento, la energía, el momento angular, etc... estarán representadas por operadores que nos permitirán calcular sus valores medios. Igualmente veremos que no existen únicamente las representaciones de coordenadas y de momentos sino una gran variedad de representaciones cada una adecuada al resultado que se desee calcular.