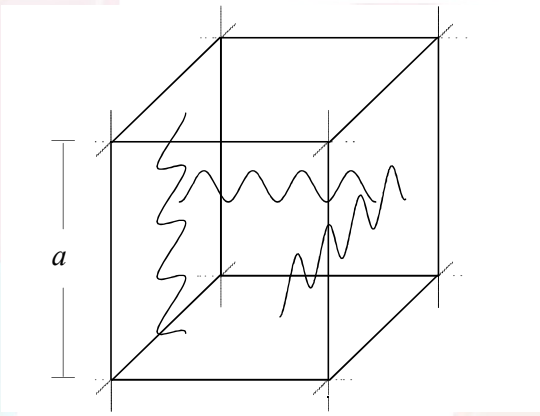
Cálculo del número de modos que se propagan en una cavidad

El modelo Rayleigh-Jeans se basa en calcular el número de modos distintos que se pueden propagar en una cavidad cuya frecuencia se encuentre comprendida entre ν y $\nu + d\nu$. Este número no depende ni de la forma de la cavidad ni de la composición de las paredes de la cavidad. Por tanto, somos libres de escoger la forma y las condiciones de contorno. La forma más sencilla corresponde a una cavidad cúbica de arista a. Por otro lado, las condiciones de contorno más sencillas son las condiciones de contorno periódicas. Estas condiciones de contorno son un poco artificiales y consisten en considerar que nuestro cubo se encuentra rodeado por infinitos cubos idénticos, de modo que si nos desplazamos una cantidad a en cualquiera de las tres direcciones paralelas a las aristas nos encontraremos con un punto idéntico. En la siguiente figura se muestra el cubo para el que vamos a calcular el número de modos de ondas electromagnéticas que se pueden propagar y cuya frecuencia debe estar comprendida entre ν y $\nu + d\nu$.



Queremos estudiar la radiación electromagnética dentro de la cavidad, pero podemos restringir nuestro estudio al campo eléctrico, ya que para una onda electromagnética a partir del campo eléctrico podemos calcular el magnético. El campo eléctrico dentro de la cavidad se podrá escribir como una superposición de ondas planas como la siguiente:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = E_{01}\vec{e}_1 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)} + E_{02}\vec{e}_2 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t\right)}$$

donde los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ son dos vectores unitarios perpendiculares entre si y perpendiculares a la dirección de propagación $\vec{k}$, ya que las ondas electromagnéticas son ondas transversales. El vector $\vec{k}$ se denomina vector de onda, cuyo módulo es el número de ondas y su dirección es la dirección de propapación.

Vamos a imponer las condiciones de contorno periódicas al campo eléctrico:

$$\vec{E}\left(x,y,z\right) = \vec{E}\left(x+a,y,z\right) = \vec{E}\left(x,y+a,z\right) = \vec{E}\left(x,y,z+a\right)$$

Estas condiciones sólo se pueden satisfacer si las componentes del vector de onda satisfacen las siguientes relaciones:

$$k_x a = 2\pi n_x, \qquad k_y a = 2\pi n_y \qquad \text{y} \qquad k_z a = 2\pi n_z$$

siendo n_x, n_y y n_z números enteros. Esto es similar a lo que ocurre con las ondas estacionarias, cuando imponemos condiciones de contorno restrictivas en los extremos y lo que resulta es que no se puede propagar una onda con cualquier valor de la longitud de onda. Recordemos, por ejemplo, las ondas estacionarias que se propagan en una cuerda tensa con sus extremos atados. En el momento que imponemos que exista un nodo en cada extremo resulta que no se puede propagar cualquier longitud de onda y, por tanto, tampoco cualquier frecuencia.

Podemos calcular ahora el número de ondas planas que se propagan dentro de la cavidad que tienen su vector de onda comprendido entre un cierto vector $\vec{k}$ y $\vec{k}+d\vec{k}$ y que será el siguiente:

$$N_{\vec{k}}\left(\vec{k}\right)\ d^3\vec{k} = 2dn_x dn_y dn_z$$

donde el factor 2 aparece para tener en cuenta las dos posibles polarizaciones, ya que para cada dirección del vector $\vec{k}$ existen dos direcciones linealmente independientes perpendiculares en las que puede oscilar el campo eléctrico. Algo que puede chocar en la expresión es que aparezca dn_x, dn_y y dn_z, como si n_x, n_y y n_z tomasen valores continuos en lugar de discretos. Para valores pequeños de n_x, n_y y n_z puede ser incorrecto, pero para valores grandes, por ejemplo de n_x, la diferencia entre uno de los posibles valores de n_x y el siguiente será muy pequeño comparado con el propio valor de n_x. En ese caso sí que podemos considerar que los incrementos que se producen en n_x, n_y y n_z son muy pequeños en comparación con sus valores.

Conociendo la relación entre n_x, n_y y n_z y las componentes del vector de onda podemos expresar este número de la siguiente forma:

$$N_{\vec{k}}\left(\vec{k}\right)\ d^3\vec{k} = 2\left(\frac{a}{2\pi}\right)^3\ d^3\vec{k}$$

Nos interesa calcular el número de modos cuya frecuencia está comprendida entre ν y $\nu+d\nu$, que estará relacionado con el número de modos cuyo número de ondas se encuentre entre k y $k+dk$. El número de ondas viene dado por el módulo del vector k. Por tanto, nos conviene escribir el elemento de volumen en el espacio de números de ondas $d^3\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$ realizando un cambio similar al que se realiza al pasar de coordenadas cartesianas a esféricas. En las coordenadas esféricas $d^3\vec{r} = \sin\theta d\theta d\varphi r^2 dr$, donde r es el módulo del vector $\vec{r}$. Si queremos considerar todos los vectores $\vec{r}$ cuyo módulo está entre r y $r+dr$ nos da igual la dirección que tengan, de modo que podemos sustituir el diferencial de ángulo sólido $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$ por el ángulo sólido completo 4π. Todos los vectores $\vec{r}$ que tienen su módulo entre r y $r+dr$, sea cual sea su dirección, tienen su extremo en un casquete esférico de radio interior r y exterior $r+dr$. El volumen de ese casquete esférico vale $4\pi r^2 dr$. Pues bien, algo parecido podemos hacer con los vectores $\vec{k}$, de modo que si sólo nos interesa su módulo, el número de modos cuyo módulo está entre k y $k+dk$ vale:

$$N_k(k)\,dk = 2\left(\frac{a}{2\pi}\right)^3 4\pi k^2 dk = \frac{a^3}{\pi^2}k^2 dk$$

Por último, conociendo la relación que existe entre la frecuencia y el número de ondas, $k = 2\pi\nu/c$, podemos encontrar el número de ondas planas que se propagan dentro de la cavidad con frecuencia comprendida entre ν y $\nu+d\nu$. Lo único que tenemos que

hacer es un cambio de variable análogo al que se realiza en una integral, de modo que $N_k(k)\,dk = N_\nu(\nu)\,d\nu$, siendo $N_\nu(\nu)\,d\nu$ el número que buscamos y que vale:

$$N_\nu(\nu)\,d\nu = \frac{8\pi a^3}{c^3}\nu^2\,d\nu$$

Esta es la expresión que utilizaron Rayleigh y Jeans para su modelo. En el libro Física Cuántica de Eisberg y Resnick se puede encontrar el mismo cálculo para una cavidad cúbica de paredes conductoras, de modo que el campo eléctrico se anula en las paredes. El número que se obtiene es idéntico ya que, como hemos dicho, no depende de las condiciones de contorno.