

PLANCKS 2024

Titel	Punkte
Bob der Brückenmeister	13
Kernfusion: Bewegung geladener Teilchen im Tokamak	13
Gezeiten	13
A glimpse on quantum cryptography	13
Stabilität einer Flammenfront	11
Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, big deal?	6
Ein Atom in Käfig	11
Quantum Bomb Tester	12
Coupled Oscillator	17
Insgesamt	109

Mit Beiträgen von Professor Arrigoni und Aichhorn. Viel Erfolg wünschen Felix, Christian und Lukas!

1 Bob der Brückenmeister

Ein Seil mit homogener Dichteverteilung, Masse m und Länge L sei von $-x_0/2$ bis $x_0/2$ befestigt. Es berührt den Boden nicht und nur die Gravitationskraft $\vec{F}_g$ wirkt auf das Seil. Unser Ziel ist es, einen Ausdruck für $y(x)$ zu finden um die Form des Seils als Funktion von x und den Anfangsbedingungen zu erhalten.

- (a) (1 Punkt) Schreibe die infinitesimale Bogenlänge ds als Funktion von dx und $y'(x)$. Hierbei ist $y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$.
- (b) (2 Punkte) In Ruhelage heben sich die Kräfte, die auf ein infinitesimales Massenelement dm wirken, in x - und y -Richtung jeweils gegenseitig auf. Stelle damit die Formeln für die Seilkraft in x -Richtung und für die Ableitungen der Seilkraft in y -Richtung auf. Nutze dafür die Formel aus (a).
- (c) (2 Punkte) In welcher Beziehung steht die Seilkraft zum Seil? Welche Relation lässt sich daraus ableiten? Nutze diese um einen weiteren Ausdruck für die Ableitung der Seilkraft in y -Richtung zu erhalten und setze diesen mit dem aus (b) gleich um die Differentialgleichung zweiter Ordnung zu erhalten.
- (d) (3 Punkte) Löse die Differentialgleichung zweiter Ordnung.
- (e) (2 Punkte) Berechne $L(x_0)$
- (f) (3 Punkte) Berechne die Kraft in x -Richtung $F_x(L, x_0)$ für den Fall, dass das Seil fast vollständig gespannt ist und für $y(-x_0/2) = 0$ und $y(x_0/2) = 0$. Nimm dazu an, dass die Seilkraft in x -Richtung größer ist als die Gewichtskraft.



Abbildung 1: Hängebrücke im Hunsrückgebirge

2 Kernfusion: Bewegung geladener Teilchen im Tokamak

Ein Teilchen mit Masse m und Ladung q befindet sich in einem homogenen zeitlich konstanten Magnetfeld $\vec{B}$. Zusätzlich wirkt eine zeitlich konstante Kraft $\vec{F}$ auf das Teilchen. Die Geschwindigkeit des Teilchens kann in parallel und normal Komponenten relativ zum Magnetfeld $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel$ aufgespalten werden.

Die Bewegungsgleichungen des Teilchens sind durch

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F}, \quad (1)$$

bestimmt.

- (a) (3 Punkte) Nun wollen wir die vollständige Lösung des Problems bestimmen. Hierfür wählen wir unser Koordinatensystem so, dass $\mathbf{F} = F_\perp \hat{\mathbf{e}}_x$ und $\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{e}}_z$. Nun können wir letzteres in Gleichung 1 einsetzen. Löse dieses System an linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Als Ansatz für die homogene Lösung eignet sich $v_x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, $v_y(t) = C \cos(\omega t) + D \sin(\omega t)$ und $v_z(t) = \text{const.}$, vergiss die partikuläre Lösung jedoch nicht!
- (b) (2 Punkte) Löse die Bewegungsgleichungen für die Anfangsbedingungen $\mathbf{v}(0) = (0, v_g - F_\perp/(qB), v_\parallel)$ und $\mathbf{r}(0) = (0, 0, 0)$. Mache außerdem eine qualitative Skizze der Kreisbahnen der Elektronen und Ionen. Was ist deren (Gyrations)radius ρ ?
- (c) (1 Punkte) Interpretiere die homogene und partikuläre Lösung.

Wir nennen von nun an den xy -Anteil der homogenen Lösung $\mathbf{v}_g$ und die partikuläre Lösung $\mathbf{v}_D$, oft Driftgeschwindigkeit genannt. Unsere Lösung für $\mathbf{v}_z$ wird im allgemeinen Fall $\mathbf{v}_\parallel$ genannt.

Betrachten wir nun das konkrete Beispiel eines Tokamak Plasmareaktors. Das wichtigste Ziel eines Plasmareaktors ist das Plasma (geladene Teilchen) davor zu schützen seine innere Oberfläche zu berühren. Wir nutzen zunächst das Koordinatensystem in Abbildung 2.

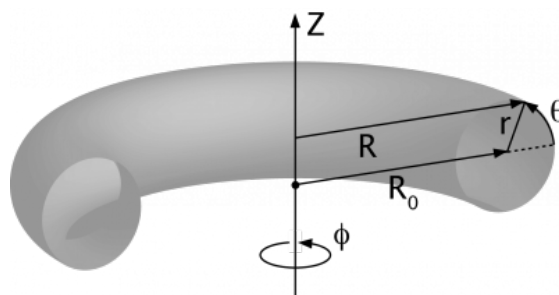


Abbildung 2: Skizze von unserem Koordinatensystem.

In den Punkten (a-c) haben wir gelernt, dass jede Kraft $\mathbf{F}_\perp$ zu einem Drift $\mathbf{v}_D$ führt der normal auf $\mathbf{B}$ und $\mathbf{F}_\perp$ steht. Bis auf den Drift, bewegen sich die Teilchen, für kleinen Gyrationradius ρ , im Mittel entlang der Feldlinien. Für unseren Tokamak wollen wir wissen, wie sich Teilchen verhalten, die sich entlang von $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_\phi$ mit einem Krümmungsradius von $\mathbf{R}$ bewegen.

- (d) (1 Punkte) Zu welchem Drift führt die dadurch entstehende Fliehkraft $\mathbf{F}_{zf}$? Was passiert dadurch mit den positiv und negativ geladenen Teilchen?
- (e) (2 Punkte) Wir führen nun eine Magnetfeldkomponente in z -Richtung ein. Daher ist $\mathbf{B} = B_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_z\hat{\mathbf{e}}_z$. Bestimme das passende Verhältnis von B_z zu B_ϕ für ein Elektron mit einer Geschwindigkeit von $v_\parallel$, um $v_z = 0$ zu erhalten. Damit ist sichergestellt, dass die Teilchen im Reaktor bleiben. Möglicherweise hilfreich: $B_z \ll B_\phi$ und $B_\phi \approx B$.

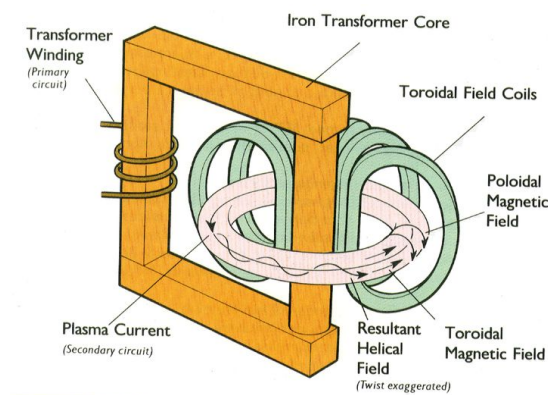


Abbildung 3: Schematischer Aufbau eines Tokamak.

- (f) (4 Punkte) Dieser *quick fix* funktioniert leider nur für Teilchen mit einer bestimmten Geschwindigkeit. Es gibt jedoch auch eine noch bessere Lösung. Hierfür nehmen wir an, dass nun $\mathbf{B} = B_\phi\hat{\mathbf{e}}_\phi + B_\theta\hat{\mathbf{e}}_\theta$. Die Magnetfeldlinien winden sich daher um den Torus, siehe Abbildung 3. Man kann zeigen dass die Bewegungsgleichungen durch

$$\begin{aligned} r \frac{d\theta}{dt} &\approx \frac{B_\theta}{B} v_\parallel + v_D \cos(\theta) \\ \frac{dr}{dt} &\approx v_D \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2)$$

gegeben sind. Löse für $r(\theta)$. Verwende dafür $\frac{B v_D}{B_\theta v_\parallel} \ll 1$ um zu zeigen, dass $r(\theta)$ zwischen zwei Umkehrpunkten oszilliert und die Teilchen daher im Tokamak bleiben!

3 Gezeiten

Wenn die Erde um den gemeinsamen Schwerpunkt des Systems Mond-Erde kreist, kompensieren sich die Gravitationskraft des Mondes und die Fliehkraft nur im Massenmittelpunkt der Erde. An allen Punkten der Erdoberfläche wirken drei Kräfte: die Gravitationskraft der Erde, die Gravitationskraft des Mondes und die Fliehkraft. Letztere stammt von der Rotation der Erde um eine Achse durch ihren Mittelpunkt und von der Revolution des Erdmittelpunkts um den gemeinsamen Schwerpunkt (Revolution ohne Rotation). Die Differenz der Gravitationskraft des Mondes und der Fliehkraft durch die Revolution ohne Rotation bildet die Gezeitenkraft.

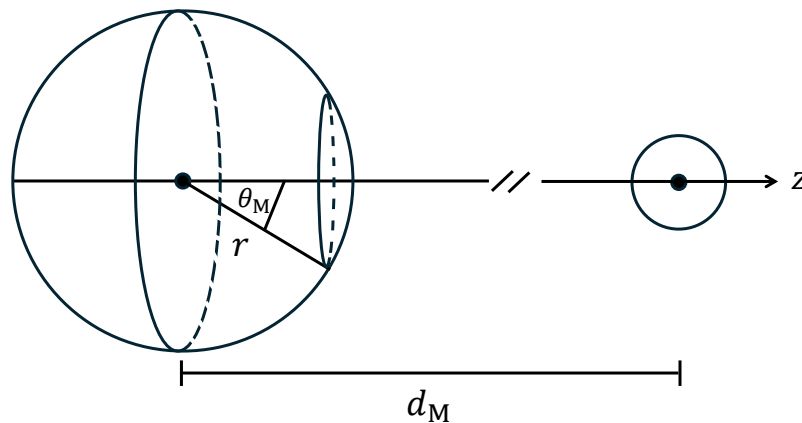


Abbildung 4: Skizze unseres Koordinatensystems.

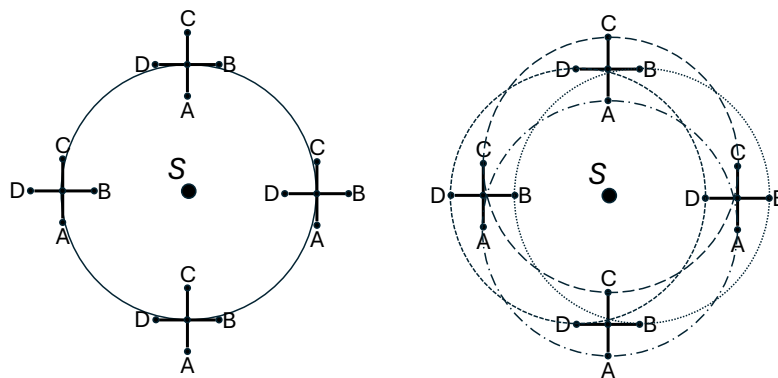


Abbildung 5: Schematische Skizze von einer Revolution ohne Rotation. Links: Ein starres Kreuz kreist um S , der Verlauf des Massenmittelpunkts ist skizziert. Rechts: Die Verläufe Eckpunkte des Kreuzes sind skizziert. Sie durchlaufen Kreise mit dem gleichen Radius.

In diesem Beispiel nehmen wir alle Körper als kugelsymmetrisch an und ihre Bah-

nen als Kreisbahnen. Wir ignorieren weiters die Änderung des Gravitationspotentials der Erde, welche durch die Verschiebung von Massen durch die Gezeitenbeschleunigung auftreten. Den Radius der Erde schreiben wir als R_E , die Distanz zwischen den Massenmittelpunkten von Mond und Erde als d_M und die von Sonne und Erde d_S . Die Massen nennen wir sinngemäß. Wir haben daher $R_E = 6371$ km, $d_M = 4 \cdot 10^5$ km, $d_S = 1.5 \cdot 10^8$ km, $M_E = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $M_M = 7 \cdot 10^{22}$ kg, $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$.

- (a) (1 Punkt) Auf den mondnächsten Punkt der Erdoberfläche wirkt eine stärkere Gravitationskraft als auf den Erdmittelpunkt. Bestimme die Differenz dieser Kräfte und zeige, dass man sie näherungsweise als

$$F_{\text{gra}}(d_M - R_E) - F_{\text{gra}}(d_M) \approx \frac{2GM_M m R_E}{d_M^3} \quad (3)$$

schreiben kann.

Wir wollen nun das Gezeitenpotential des Mondes, $\Phi_M(r, \theta)$, als Funktion von Abstand zum Massenmittelpunkt der Erde und einem Winkel herleiten. Wir gehen dazu in ein Koordinatensystem über, dessen Ursprung sich im Massenmittelpunkt der Erde befindet, allerdings nicht mit der Erde mitrotiert. Desweiteren nutzen wir Kugelkoordinaten. Wir führen zusätzlich eine z -Achse, ($\theta_M = 0$), ein, die immer zum Mond zeigt, siehe Abbildung 4. Dadurch sind alle Punkte, die die gleichen (r, θ_M) Koordinaten haben gleich weit vom Mond entfernt.

- (b) (2 Punkte) Nutze den Fakt, dass sich die Fliehkraft durch die Revolution ohne Rotation (RoR), siehe Abbildung 5, und die Gravitationskraft durch den Mond im Massenmittelpunkt aufheben. Daher ist die Fliehkraft der RoR an jedem Punkt auf der Erde im Betrag gleich der Gravitationskraft des Mondes im Massenmittelpunkt der Erde, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Zeige, dass $-\nabla \Phi_{\text{Zf}}$ die Zentrifugalkraft der RoR ist. Hierbei ist

$$\Phi_{\text{Zf}} = \frac{GM_M m}{d_M^2} r \cos(\theta_M), \quad (4)$$

das zugehörige Potential der RoR.

- (c) (5 Punkte) Das Gezeitenpotential des Mondes $\Phi_M = \Phi_{\text{gra}} + \Phi_{\text{Zf}}$, wobei Φ_{gra} das Potential durch die Gravitation des Mondes ist. Expandiere dieses um zu zeigen, dass näherungsweise

$$\Phi_M(\theta_M, r) \approx -\frac{GM_M m}{d_M} \left[1 + \frac{1}{4} \frac{r^2}{d_M^2} (3 \cos(2\theta_M) + 1) \right] \quad (5)$$

gilt. Nutze dafür $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$ und vernachlässige Terme die mit $(\frac{r}{d_M})^4$ oder höher Ordnung skalieren.

Der Wasserstand des Meeres wird durch das Gezeitenpotential, $\Phi_G(\theta_M, \theta_S, r) = \Phi_M(\theta_M, r) + \Phi_S(\theta_S, r)$ etwas verändert, wobei $\Phi_S(\theta_S, r)$ das Gezeitenpotential der Sonne ist. Die Änderung der Höhe, also die Abweichung vom durchschnittlichen Meeresspiegel, nennen wir $h(\theta_M, \theta_S, r)$.

- (d) (1 Punkt) In welchem Verhältnis steht $h(\theta_M, \theta_S, r)$ zu Φ_G ? Hinweis: Die Meeresoberfläche ist eine Equipotentialfläche.
- (e) (2 Punkte) Skizziere die Konstellationen für die die Flut maximal bzw minimal ist. Was ist das Verhältnis dieser beiden Fluthöhen?
- (f) (2 Punkte) Wir nutzen das Mittelmeer als Gezeitenkraftwerk. Nimm an, dass du die potentielle Energie des Höhenunterschiedes in beide Richtungen mit einem Wirkungsgrad von 0.5 nutzen kannst. Ignoriere den Einfluss der Sonne. Die Fläche des Mittelmeeres umfasst 2.5 Millionen km^2 . Wie viel GW Leistung hat unser Mittelmeerkraftwerk?

4 A glimpse on quantum cryptography

In this example we want to show how quantum mechanics can be used to minimize the risk that an unwanted intruder/spy intercepts messages. In the following we assume that the sender Alice (A) wants to send a sequence of bits to a receiver Bob (B).

We will encode the bits through spins. The spin operator is $\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2}\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, with $\hat{\sigma}_i$ the three Pauli matrices. We use $|\sigma_z = +1\rangle$ and $|\sigma_z = -1\rangle$ for the eigenstates of $\hat{S}_z$ with eigenvalues $+\frac{\hbar}{2}$ and $-\frac{\hbar}{2}$.

Lets now consider measurments of spins along an axis u in the (x, z) -plane, defined by

$$\mathbf{e}_u = \cos \theta \mathbf{e}_z + \sin \theta \mathbf{e}_x, \quad (6)$$

with the spin operator projected to this axis

$$\hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{e}_u = \frac{\hbar}{2}(\cos \theta \hat{\sigma}_z + \sin \theta \hat{\sigma}_x). \quad (7)$$

- 1) (2 points) Show that this operator has eigenstates

$$|\sigma_u = +1\rangle = \cos(\theta/2)|\sigma_z = +1\rangle + \sin(\theta/2)|\sigma_z = -1\rangle \quad (8)$$

$$|\sigma_u = -1\rangle = -\sin(\theta/2)|\sigma_z = +1\rangle + \cos(\theta/2)|\sigma_z = -1\rangle \quad (9)$$

with eigenvalues $+\hbar/2$ and $-\hbar/2$, resp. Assuming a state prepared in $|\sigma_z = +1\rangle$, calculate the probabilities $p_u^\pm$ of finding $\pm\frac{\hbar}{2}$ when measuring the projection of the spin on the u axis.

After this measurement, we again measure the z component of the spin.

- 2) (1 points) Show that the probability to find again the state $|\sigma_z = +1\rangle$ is given by $P_{++}(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \theta)$. The identity $\cos^4(\theta/2) + \sin^4(\theta/2) = (1 + \cos^2 \theta)/2$ might be useful.
- 3) (1 points) Starting from an initial state $|\sigma_z = -1\rangle$, what is the probability $P_{--}(\theta)$ to find again $|\sigma_z = -1\rangle$ in the second measurement?

We now prepare a pair (a, b) of spins in a source. The spin state of the two particles is given by

$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\sigma_z^a = +1\rangle \otimes |\sigma_z^b = +1\rangle + |\sigma_z^a = -1\rangle \otimes |\sigma_z^b = -1\rangle \right) \quad (10)$$

- 4) (1 points) Use the identities $|\sigma_x = \pm 1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\sigma_z = +1\rangle \pm |\sigma_z = -1\rangle)$ and rewrite the state $|\chi\rangle$ in terms of $|\sigma_x = \pm 1\rangle$.

We now separate the two spins, and send the part a to Alice, and part b to Bob. Although the spins are separated in space, they still are entangled in their spin sector.

- 5) (1 points) Alice now measures only her spin, i.e. part a . She can do it along the z axis ($\theta_a = 0$) or along the x axis ($\theta_a = \pi/2$). What are the possible results of these measurements, their probabilities, and the states after the measurements?
- 6) (1 points) After Alice's measurement, Bob measures the spin of particle b along an axis u_b of angle θ_b . Give the possible results of Bob's measurements and their probabilities in terms of Alice's results in the four following configurations: (a) $\theta_a = 0, \theta_b = 0$, (b) $\theta_a = 0, \theta_b = \pi/2$, (c) $\theta_a = \pi/2, \theta_b = 0$, (d) $\theta_a = \pi/2, \theta_b = \pi/2$. In which cases do the measurements of Alice and Bob give with certainty the same results?
- 7) (1 point) Consider now the situation $\theta_a = 0$. Suppose that a *spy* is sitting between the source and Bob, and has access to part b of the system before it reaches Bob. The spy measures the part b along an axis u_s of angle θ_s . After that, Bob also measures part b , but along $\theta_b = 0$. What is the probability $P(\theta_s)$ as function of θ_s that Alice and Bob measure the same result?
- 8) (3 point) What is the expectation value that Alice and Bob measure the same result, if the spy chooses $\theta_s = 0$ or $\theta_s = \pi/2$ at random?

From what we have just learned, we can set up the following protocol to communicate securely:

- i) Alice controls the source and prepares an ordered sequence of N pairs of spins, she keeps the a parts and sends the b parts towards Bob.
- ii) For each spin, Alice and Bob measure either the z or the x component. They choose the direction independently of each other, without correlation, with probability $1/2$. They both register the results.
- iii) Bob selects a subset $N' \approx N/2$. He communicates openly to Alice (by radio etc.) the axis and the results of the measurements for each event in this subset.
- iv) Alice compares for this subset her axes and her results with those communicated by Bob. By doing so, she can tell whether there is a spy or not. If a spy is spotted, the whole communication is dismissed.
- v) If no spy is spotted, the remaining spins can be used to transmit information (the details how do not matter here).

Final questions:

- 9) (1 points) If she is allowed to compare her results with the ones from Bob, how can Alice be sure that a spy is present?
- 10) (1 points) What is the probability that an operating spy will escape being detected? Calculate this probability for $N' = 200$.

5 Stabilität einer Flammenfront

Ein einseitig geschlossenes Rohr mit einem Durchmesser der Größenordnung l ist mit einem brennbaren Gasgemisch 1 der Dichte ρ_1 gefüllt. Nun wird das Rohrende bis zur Entzündung des Gases erhitzt, es bildet sich eine Flammenfront von konstanter Dicke δ aus, die sich vom Rohrende weg mit gleichmäßiger Geschwindigkeit ausbreitet und als Verbrennungsprodukt ein Gasgemisch 2 der Dichte ρ_2 hinterlässt. Das restliche Gas möge sich allenfalls parallel zum Rohr bewegen. (Siehe Abbildung 6)

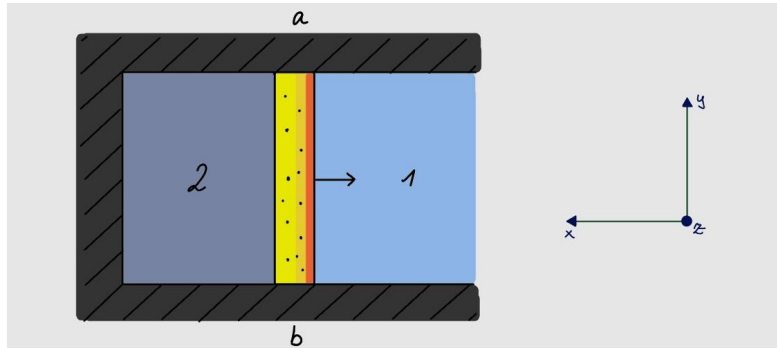


Abbildung 6: Langsame Verbrennung in einem Rohr. Gasgemisch 1 ist unverbrannt, Gasgemisch 2 ist bereits verbrannt. Die Verbrennungsfront erstreckt sich von a nach b , und läuft vom Rohrende weg in negative x -Richtung.

1. (1 Punkt) Zur Vereinfachung des Problems werden folgende zusätzliche Annahmen getroffen:

Annahme 1 Die Dicke δ der Flammenfront ist klein gegenüber den Rohrabmessungen l und kann somit vernachlässigt werden.

Annahme 2 Die Flammenfront breitet sich weit unter der Schallgeschwindigkeit c aus.

Annahme 1 erlaubt es, den chemischen Verbrennungsvorgang gesondert von der physikalischen Gasströmung zu behandeln. *Annahme 2* rechtfertigt die Verwendung eines idealen inkompressiblen reibungsfreien Gasmodells. Begründe die Annahmen. Folgende Größen könnten dabei hilfreich sein.

$$\left. \begin{array}{l} v_1 \dots \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Verbrennung} \\ c \dots \text{Schallgeschwindigkeit} \\ \tau \dots \text{Charakteristische Reaktionszeit} \\ \tau_{fr} \dots \text{mittlere freie Flugzeit eines Moleküls} \\ \chi \dots \text{Temperaturleitfähigkeit} \end{array} \right\} \quad (11)$$

Untersuche die Stabilität der gegebenen Flammenfront gegenüber kleinen Störungen $\zeta \sim De^{iky-i\omega t}$ normal zur Flammenfront. Wähle hierfür ein Koordinatensystem, in dem

die ungestörte Flammenfront ruht und bündig zur yz -Ebene liegt. Die Bewegungsgleichungen für die Abweichungen $\mathbf{v}'$, p' von $\mathbf{v} \sim \hat{e}_x$ und p lauten

$$\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}' = -\frac{1}{\rho} \nabla p', \quad (12)$$

wobei für ρ , p , p' , $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ die Dichten, Drücke und Geschwindigkeiten der Gasgemische 1 und 2 einzusetzen sind. Weiters ist an der Flammenfront die Tangentialkomponente stetig.

$$v'_{1y} + v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} = v'_{2y} + v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad (13)$$

Für die Normalkomponente der Geschwindigkeit gilt

$$v'_{1y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = v'_{2y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

Wichtig: Die Abweichungen $\mathbf{v}'$, p' von den Gleichgewichtsgrößen $\mathbf{v}$, p können als z -unabhängig angesehen werden, $\mathbf{v}' \equiv \mathbf{v}'(x, y, t)$, $p' \equiv p'(x, y, t)$.

2. (1 Punkt) Welche Gleichung für den Druck ergibt sich aus den Gleichungen (12)?
3. (1 Punkt) Die Störung ζ ist periodisch in y und t . Welche Randbedingungen der Gleichungen (12) sind kompatibel dazu? Wähle möglichst einfache Randbedingungen!
4. (2 Punkte) Bestimme die Druckabweichungen $p'_1(x, y, t)$, $p'_2(x, y, t)$ in den Gasgemischen 1 und 2 aus der in Unterpunkt 2 bestimmten Gleichung unter Berücksichtigung der angenommenen Randbedingungen. (Hinweis: starte mit einem geeigneten Exponentialansatz)
5. (1 Punkt) Bestimme eine homogene Lösung $\mathbf{v}'(x, y, t)$ der Gleichungen (12) für das Gasgemisch 2. Ist sie für den gesamten Bereich physikalisch sinnvoll? Es kann $v'_z = 0$ angenommen werden.
6. (1 Punkt) Aus den Drücken bestimme dann Geschwindigkeitsabweichungen $\mathbf{v}'_1$, $\mathbf{v}'_2$ für beide Gasgemische 1, 2, abermals mit verschwindender z -Komponente. Beachte die homogene Lösung aus dem vorherigen Unterpunkt.
7. (2 Punkt) Die erhaltenen Lösungen für $\mathbf{v}'_1$, p'_1 , $\mathbf{v}'_2$, p'_2 ließen sich *prinzipiell* in die Gleichungen (14), (13) einsetzen, um ein Gleichungssystem für die Koeffizienten zu erhalten. Eine längere Rechnung würde dann (unter Verwendung von $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$) auf folgende Bedingung für deren Lösbarkeit führen

$$\Omega^2(v_1 + v_2) + 2\Omega k v_1 v_2 + k^2 v_1 v_2 (v_1 - v_2) = 0, \quad \Omega \equiv i\omega \quad (15)$$

Welche Lösungen Ω sind für obiges Gleichungssystem möglich?

8. (2 Punkte) Was lässt sich über die Stabilität der Flammenfront aus $\Omega \equiv i\omega$ aussagen? Findet sich diese Modelllösung auch in der realen Welt? Warum (nicht)?

6 Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant, big deal?

Zur Überraschung vieler hat das Michelson Morley Experiment im Jahre 1887 gezeigt dass sich Licht für jeden Beobachter mit der exakt gleichen Geschwindigkeit c bewegt.

Wie allgemein bekannt ist, führte dieser experimentelle Fakt zur Notwendigkeit der Lorentz Transformation.

$$t' = \gamma \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \qquad t = \gamma \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \qquad (16)$$

$$x' = \gamma (x - vt) \qquad x = \gamma (x' + vt') \qquad (17)$$

$$y' = y \qquad y = y' \qquad (18)$$

$$z' = z \qquad z = z', \qquad (19)$$

Versuchen wir als Erstes herauszufinden ob die Lichtgeschwindigkeit tatsächlich invariant unter der Lorentztransformation ist. Betrachten wir ein Photon (einen Lichtstrahl) das sich in eine beliebige Richtung bewegt. Zum Zeitpunkt $t_1 = 0$ hat es die Position $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$. Zum Zeitpunkt $t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$ die Position (x_2, y_2, z_2) .

- (a) (1 Punkt) Zeige für das Photon, dass es auch im gestrichenen Bezugssystem die Geschwindigkeit c besitzt.

Obwohl die Lichtgeschwindigkeit konstant ist, verändert sich die Wellenlänge λ und damit auch die Frequenz f einer Lichtwelle unter der Lorentztransformation.

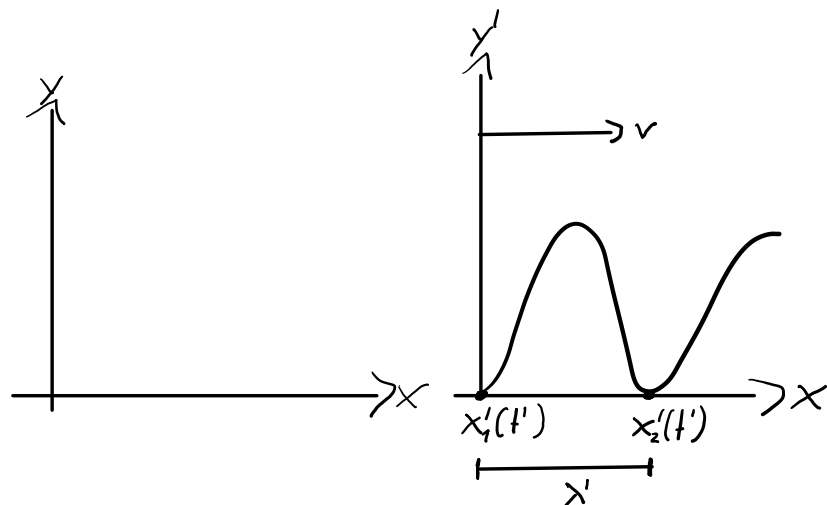


Abbildung 7: Skizze der Koordinatensysteme. Zum Zeitpunkt $t' = 0$ überlappen sich die Koordinatensysteme.

In Abbildung 7 sieht man eine Lichtwelle. Sei $x'_1(t')$ die Position des letzten ausgesendeten Wellentals und $x'_2(t')$ die Position des vorletzten ausgesendeten Wellentals. Zu

$t' = 0$ gilt $x'_1 = 0$ und $x'_2 = \lambda'$, wobei letzteres die Wellenlänge im bewegten Bezugssystem ist. Bestimme $x_2(t = 0)$ und $x_1(t = 0)$ und damit die Wellenlänge im Laborsystem, denn $\lambda = x_2(t = 0) - x_1(t = 0)$. Beachte dass sich Zeitpunkte auch transformieren!

(b) (2 Punkte) Bestimme $\frac{\lambda'}{\lambda}$ und $\frac{f'}{f}$.

Wir betrachten nun einen Körper der Masse m . Er habe im bewegten System die Geschwindigkeit $v'_i = 0$ und im stationären v_{in} , wobei in für initial steht. Der Körper sendet gleichzeitig zwei Photonen mit der gleichen Frequenz f' in entgegengesetzte Richtung aus (siehe Skizze). Da beide im bewegten System die gleiche Frequenz und somit den gleichen Impuls haben sollte sich seine Geschwindigkeit nicht ändern, d.h. $v'_{\text{fin}} = 0$, wobei fin für finale steht.

(c) (1 Punkt) Mit Hilfe des Ergebnisses des Punktes (b), bestimme die Frequenzen der beiden Photonen im Ruhesystem f_1 und f_2 .

Als nächstes wollen wir uns die Gleichung für die Impulserhaltung im Ruhesystem ansehen, diese ist

$$m_{\text{fin}}v_{\text{fin}} + p_{\text{ph},1} + p_{\text{ph},2} = m_{\text{in}}v_{\text{in}}, \quad (20)$$

wobei $p_{\text{ph},1}$ und $p_{\text{ph},2}$ die Impulse von Photonen sind. Wir sehen, es existiert eine Massendifferenz $\Delta m = m_{\text{fin}} - m_{\text{in}}$. Außerdem hat der Körper Energie $\Delta E = E_{\text{ph},1} + E_{\text{ph},2}$ verloren.

(d) (2 Punkte) Bringe Δm und ΔE in Verbindung und interpretiere.

7 Ein Atom im Käfig

Wir wollen uns mit einem Atom in einem leeren optischen Käfig (in seinem Inneren ist nur ein Vakuum) beschäftigen. Klassisch würde sich der Zustand des Atoms also nicht ändern, da kein elektromagnetisches Feld existiert. Wie ist diese Situation nun im quantenmechanischen Fall? Normalerweise (in der Schrödingergleichung) machen wir das ja klassisch.

Der Einfachheit halber betrachten wir den eindimensionalen Fall mit nur einer Polarisation. Die klassischen Lösungen für das elektrische und magnetische Feld in einem optischen Käfig ($\mathbf{E} = 0$ am Rand, wobei der Käfig sich von $x = 0$ bis $x = L_x$ erstreckt) sind dann

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_k A_k(t) \sin(kx) \hat{\mathbf{e}}_y \quad (21)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \sum_k \dot{A}_k(t) D(k) \cos(kx) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (22)$$

$A_k(t)$ beschreibt hier die Feldamplitude.

- (a) (1 Punkt) Was sind die erlaubten Werte für k um die Randbedingungen zu erfüllen. Was muss der Parameter $D(k)$ sein damit die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \dot{\mathbf{E}} \quad (23)$$

erfüllt ist?

- (b) (2 Punkte) Die Energie im EM Feld ist gegeben durch

$$H = \int \frac{dr}{2} \left[\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right] \quad (24)$$

Zeige dass man obige Gleichung als

$$H = \sum_k \left[\frac{\dot{Q}_k^2}{2} + \frac{\omega^2 Q_k^2}{2} \right] \quad (25)$$

schreiben kann, wobei $Q_k = \lambda(k) A_k$ sei. Bestimme λ .

Nun quantisieren wir diese Hamiltonfunktion wie üblich. Das bedeutet $\dot{Q}_k \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial Q_k}$ und $Q_k \rightarrow \hat{Q}_k$. Desweiteren führen wir Erzeuger und Vernichter

$$a_k^\pm = \hat{Q}_k \sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} \pm \frac{\partial}{\partial Q_k} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \quad (26)$$

ein.

- (c) (2 Punkte) Zeige, dass der Hamiltonoperator aus Punkt (b) durch $\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(a_k^+ a_k^- + \frac{1}{2})$ gegeben ist und berechne danach den elektrischen Feldoperator $\hat{\mathbf{E}}$ indem du $\hat{Q}_k$ durch Erzeuger und Vernichter ausdrückst und in Gleichung 21 einsetzt.

Als nächstes wollen wir den Hamiltonoperator des Gesamtsystems bestimmen. Wir nehmen hierfür an, dass das Atom gut durch ein Zweiniveausystem bestimmt ist. Sein Zustand ist also durch

$$|\psi\rangle = c_g|\psi_g\rangle + c_e|\psi_e\rangle$$

gegeben, wobei g for ground und e für excited state steht. Die interaktions-Hamiltonfunktion ist gegeben durch $\hat{H}_I = -e\hat{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{r}$. Wenn wir annehmen, dass die Grundzustandsenergie ϵ_g des Atomsystems null ist, können wir die Gesamthamiltonian schreiben als

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(k)(a_k^+ a_k + \frac{1}{2}) + \epsilon_e |\psi_e\rangle\langle\psi_e| + \sum_{\sigma=g,e} \sum_{\sigma'=g,e} |\psi_\sigma\rangle\langle\psi_\sigma| \hat{H}_I |\psi_{\sigma'}\rangle\langle\psi_{\sigma'}| \quad (27)$$

Den letzten Term können wir schreiben als

$$\hat{H}_I = \sum_k \gamma_k^+ \sigma^- a_k^+ + \gamma_k^- \sigma^+ a_k^- + \text{zusätzliche Terme},$$

wobei $\sigma^+ = |\psi_e\rangle\langle\psi_g|$ und $\sigma^- = |\psi_g\rangle\langle\psi_e|$. Wir wollen den Zustand des Gesamtsystems als

$$|\psi\rangle = c_g |\psi_g\rangle a_{k_1}^+ |0\rangle + c_e |\psi_e\rangle |0\rangle \quad (28)$$

schreiben, wobei $k_1 = \pi/L$. $|0\rangle$ sei der Grundzustand des elektromagnetischen Feldes (der Vakuum-state). $a_{k_1}^+ |0\rangle$ beschreibt den state in dem sich ein Photon in der niedrigsten Mode des EM Feldes befindet.

- (d) (1.5 Punkte) Bestimme γ_k^+ und γ_k^- .
- (e) (3 Punkte) Nehmen wir an, dass $\hbar\omega(k_1) = \epsilon_e$. Bestimme die Zeitentwicklung von $c_g(t)$ und $c_e(t)$ und interpretiere.
- (f) (1.5 Punkte) Warum können schwer andere states außer $|\psi_g\rangle a_{k_1}^+ |0\rangle$ und $|\psi_e\rangle |0\rangle$ erreicht werden? Warum können wir die zusätzliche Terme in $\hat{H}_I$ vernachlässigen?

8 Quantum Bomb Tester

You have been drafted by the government to help in the demining effort in a former war-zone. In particular, retreating forces have left very sensitive bombs in some of the sealed rooms. The bombs are configured such that if even one photon of light is absorbed by the fuse (i.e. if someone looks into the room), the bomb will go off. Each room has an input and output port which can be hooked up to external devices. An empty room will let light go from the input to the output ports unaffected, whilst a room with a bomb will explode if light is shone into the input port and the bomb absorbs even just one photon.

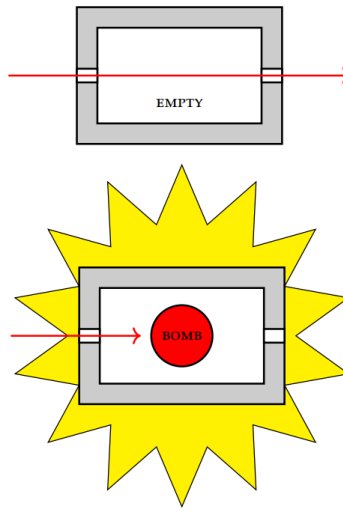


Abbildung 8: Quantum Bomb illustration.

Your task is to find a way of determining whether a room has a bomb in it without blowing it up, so that specialised (limited and expensive) equipment can be devoted to defusing that particular room. You would like to know with certainty whether a particular room had a bomb in it. To start with, consider the setup (see figure 9) where the input and output ports are hooked up in the lower arm of a Mach-Zehnder interferometer.

For the first part, let the beam-splitter have the effect:

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

The state $|0\rangle$ is in vector notation $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $|1\rangle$ is $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- (a) (1 Punkte) Assume an empty room. Send a photon to input port $|0\rangle$. Which detector, at the output port, will register the photon?

Hint: Consider the setup where the input and output ports are hooked up in one of the arms of a Mach-Zehnder interferometer.

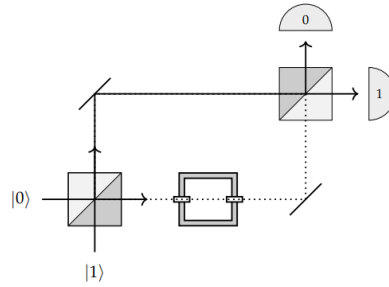


Abbildung 9: Mach Zehnder interferometer for bomb testing

- (b) (1 Punkte) Now assume that the room does contain a bomb. Again, send a photon to input port $|0\rangle$. Which detector will register the photon and with which probability?
- (c) (2 Punkte) Design a scheme that allows you – at least part of the time – to decide whether a room has a bomb in it without blowing it up. If you iterate the procedure, what is its overall success rate for the detection of a bomb without blowing it up?

Next we assume that the two beam splitters in the interferometer are different. Say the first beamsplitter reflects incoming light with probability r and transmits with probability $t = 1 - r$ and the second one transmits with probability r and reflects with probability t . This makes the effect of the beamsplitters manifest as

$$B_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{t} & i\sqrt{r} \\ i\sqrt{r} & \sqrt{t} \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{r} & i\sqrt{t} \\ i\sqrt{t} & \sqrt{r} \end{pmatrix}$$

- (d) (3 Punkte) Would the new setup improve the overall success rate of the detection of a bomb without blowing it up?

There exists a scheme, involving many beam splitters as shown in figure 10.

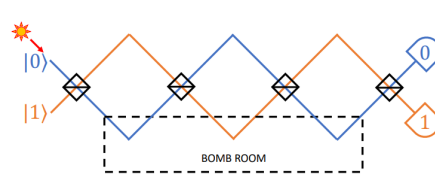


Abbildung 10: Perfect quantum bomb tester

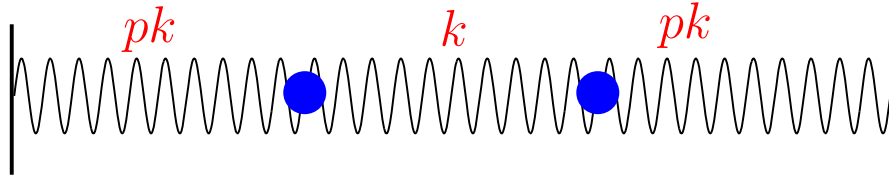
This has the effect of

$$B_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & i \sin \theta \\ i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

This scheme utilizes something called “quantum Zeno effect”.

- (e) (5 Punkte) Try to work out the value for θ such that the success rate for detecting a bomb without blowing it up approaches 1!

9 Coupled Oscillators



Consider two classical particles each with mass m connected with each other and to the two external fixed points via springs as indicated in the figure (which shows the equilibrium position). k and pk are the spring constants. The particles can only move in the horizontal direction.

- (a) (2 Punkte) Determine the frequencies of the modes of the oscillation. For this purpose it might be useful to rewrite the equations of motion in terms of $x_1 + x_2$ and $x_1 - x_2$.
- (b) (2 Punkte) Determine the time evolution of their coordinates (deviations from the equilibrium positions) $x_1(t)$ and $x_2(t)$ with given initial conditions

$$x_1(0) = x_0 \quad x_2(0) = 0 \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$$

9.1 Quantum mechanical case

Consider now the quantum mechanical case. We take here $p = \frac{1}{4}$.

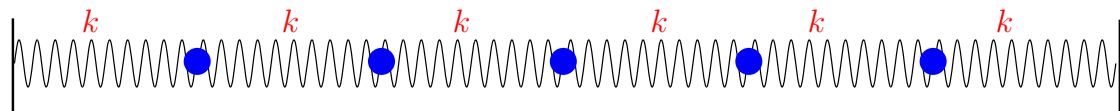
- (c) (3 Punkte) Determine the ground-state energy of the system, as well as the expectation value $\langle x_1^2 \rangle$ in the ground state.

9.2 Quantum thermodynamics

The quantum mechanical system (again $p = \frac{1}{4}$) is in equilibrium at temperature T (you can work in units where the Boltzmann constant $k_B = 1$).

- (d) (2 Punkte) Determine the internal energy U (average value of the total energy) of the system.
- (e) (2 Punkte) Evaluate this explicitly for large temperatures, carry out a Taylor series in $1/T$ up to order T^1 . Determine the heat capacity $C \equiv \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$ in that case. ($n = 2$ is the number of particles)

9.3 n particles



We now take $p = 1$ and consider the case of an arbitrary number n of particles. We start again with the classical case.

- (f) (3 Punkte) Find the eigenfrequencies in this case

Hint, Ansatz: $x_r(t) = \Re A e^{i\omega t} \sin(kr),$

where r equals the index of the masses. You might find the following relation useful

$$\sin(k(r \pm 1)) = \sin(kr) \cos(k) \pm \cos(kr) \sin(k) \quad (29)$$

9.4 $n \rightarrow \infty$ particles, quantum thermodynamics

Consider now again the quantum mechanical case at temperature T for $n \rightarrow \infty$.

- (g) (3 Punkte) Determine the heat capacity $C \equiv \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$ of the system in the low-temperature limit (lowest nonvanishing order in a Taylor series in T).

Hint: $\int_0^\infty \frac{x dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6}$