

Grupos finitos extremos en el cubo de Rubik

Por José RUIZ SANTAELLA

Grupos finitos extremos en el cubo de Rubik

En el cubo de Rubik, por giros de sus caras, se forman muchos grupos finitos. Los hay de dos clases: los formados por los cubos vértices (CV) y los formados por los cubos bordes (CB).

Los más pequeños de ellos se forman por los movimientos de dos cubos (CV o CB) y los llamo *grupos finitos mínimos*.

Los mayores de ellos se forman por los movimientos de todos los cubos (CV o CB) y los llamo *grupos finitos máximos*.

Un tercer grupo está formado por los movimientos de todos los cubos vértices y de todos los cubos bordes, y a este grupo lo llamo *grupo finito super*.

Un cuarto grupo está formado por los movimientos de dos CV y de dos CB, y a este grupo lo llamo *grupo finito infer*.

Grupos finitos mínimos

A. Producidos por movimientos de dos cubos vértices.

1.- La aplicación de la fórmula:

$A^{-1}(F B F^{-1} B^{-1})(F B F^{-1} B^{-1}) A (B F B^{-1} F^{-1})(B F B^{-1} F^{-1})$ (2, pág. 24), origina los movimientos de los vértices que se indican en el gráfico n.º 1. Ambos vértices giran $1/3$ de vuelta, uno de ellos en sentido horario y el otro en sentido anti-horario.

Los giros de los vértices indican que es menester aplicar la fórmula indicada dos veces más para conseguir que ambos vértices queden centrados y bien colocados.

2.- La aplicación de la fórmula:

$A (F B F^{-1} B^{-1})(F B F^{-1} B^{-1}) A^{-1} (B F B^{-1} F^{-1})(B F B^{-1} F^{-1})$ (2, pág. 24, figura inferior), origina los movimientos de dos cubos vértices como indica la figura n.º 2. Como vemos, cada vértice gira en sentido contrario del otro, es decir, sentido horario y anti-horario. Como los giros son de $1/3$ de vuelta la repetición de dos fórmulas más produciría que los dos cubos vértices girados vuelvan a su sitio de origen.

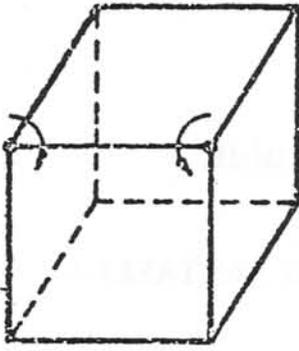


Fig. 1

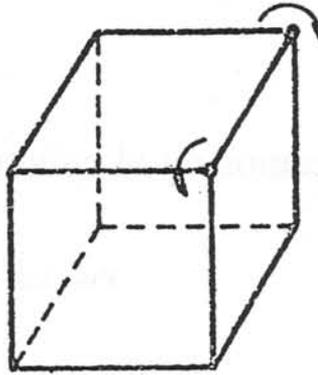


Fig. 2

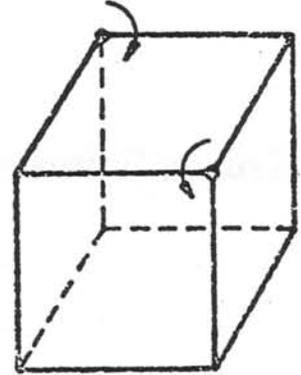


Fig. 3

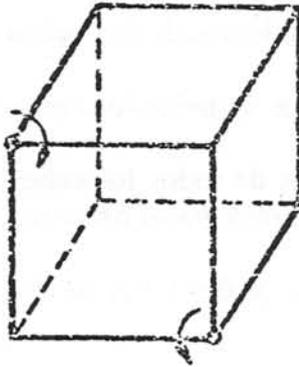


Fig. 4

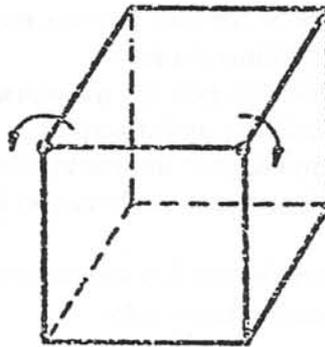


Fig. 5

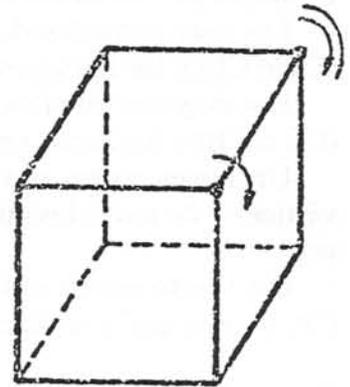


Fig. 6

3.- La aplicación de la fórmula:

$A^2 (F B F^{-1} B^{-1}) (F B F^{-1} B^{-1}) A^2 (B F B^{-1} F^{-1}) (B F B^{-1} F^{-1})$ (2, pág. 25), origina los movimientos de los dos cubos vértices que indica la figura n.º 3, con giros horario y anti-horario de $1/3$, y por tanto la aplicación por tres veces de la fórmula haría que los dos cubos vértices girados se sitúen en la posición de origen.

4.- La aplicación de la fórmula:

$F^2 A T^{-1} A^{-1} I^{-1} T^{-1} I F^2 I^{-1} T I A T A^{-1}$ (5, pág. 139, inverso generador 9), origina los movimientos de los dos cubos vértices que se indican en el gráfico n.º 4. Por ser ambos giros de $1/3$, de nuevo la aplicación de tres fórmulas llevaría los cubos girados a su posición correcta.

5.- La aplicación de la fórmula:

$F^2DF^{-1}BD^2B^{-1} (IAI^{-1}A^{-1})^3 BD^2B^{-1}FD^{-1}F^2 (IAI^{-1}A^{-1})^3$ (1, pág. 56), origina los giros horario y anti-horario de los cubos vértices que indica el gráfico n.º 5. Como ambos vértices giran $1/3$, uno en sentido horario y el otro en sentido anti-horario, la aplicación de tres fórmulas haría que ambos vértices quedasen centrados.

6.- La aplicación de la fórmula:

$D^{-1}BDFBF^{-1}AFB^{-1}F^{-1}D^{-1}B^{-1}DA^{-1}$ (4, pág. 22), origina los giros de los cubos vértices que indica la figura n.º 6. Uno gira $1/3$ y el otro $2/3$, ambos en sentido horario. Como el giro de $2/3$ en sentido horario es igual que el giro de $1/3$ en sentido anti-horario, no hay desacuerdo con los giros que hemos indicado en las figuras anteriores.

Nuevamente la aplicación tres veces de la fórmula indicada restituye los dos vértices girados a su posición de origen.

B. Producidos por movimientos de dos cubos bordes.

1.- La aplicación de la fórmula:

$T^{-1}B^2T^2BT^{-1}B^{-1}T^{-1}B^2FITI^{-1}F^{-1}$ (5, pág. 112), origina los giros de los dos cubos bordes indicados en la figura 7. Dado que los cubos bordes giran 180 grados, quiere decir, que repitiendo otra vez la fórmula llegaremos a conseguir el cubo en su posición de salida.

2.- La aplicación de la fórmula:

$A^2ID^{-1}FID^{-1}BID^{-1}T^2DI^{-1}BDI^{-1}FDI^{-1}$ (5, pág. 92), origina los movimientos de los dos cubos bordes que indica la figura n.º 8, y, como antes, la repetición de la fórmula vuelve el cubo a su posición de partida.

3.- La aplicación de la fórmula:

$B^{-1}IB^{-1}TB^2 (F^2D^2)^3 B^2T^{-1}BI^{-1}B (F^2D^2)^3$ (1, pág. 53), origina los movimientos de los cubos bordes que se indican en la figura 9, y, como antes, repitiendo una vez más la fórmula vuelve el cubo a su posición de origen.

4.- La aplicación de la fórmula:

$F^2IB^{-1}F^2T^2AD^{-1}FA^{-1}DF^2T^2I^{-1}BF$ (3, pág. 66), origina los movimientos de los dos cubos bordes que indica la figura 10. De nuevo, la aplicación otra vez de la fórmula lleva el cubo a su posición de origen.

5.- La aplicación de la fórmula:

$T^{-1}D^2T^2DT^{-1}D^1T^{-1}D^2FBTB^{-1}F^{-1}$ (4, pág. 56), origina los movimientos de los cubos bordes que indica la figura 11. La repetición de la fórmula vuelve el cubo a su posición de origen.

6.- La aplicación de la fórmula:

$A^{-1}FAB^{-1}I^2A^2B^2DAD^{-1}B^2A^2I^2BA^{-1}F^{-1}$ (10, pág. 4), origina los giros de los

Los cubos bordes que indica la figura 12, que como en casos anteriores, la repetición de la fórmula lleva el cubo a su posición de origen.

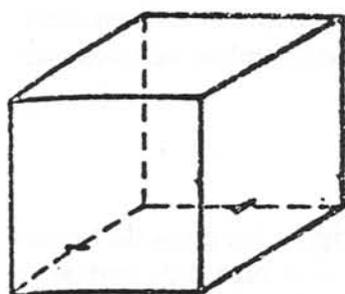


Fig. 7

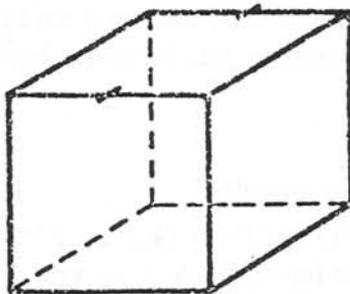


Fig. 8

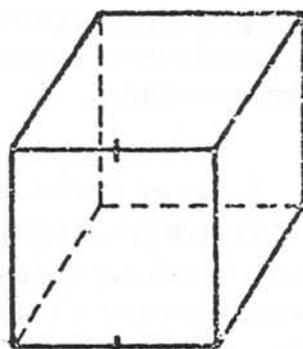


Fig. 9

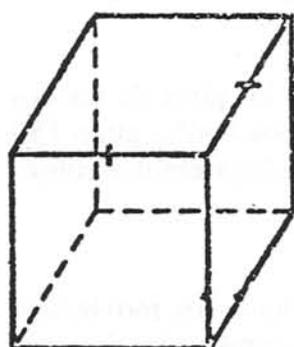


Fig. 10

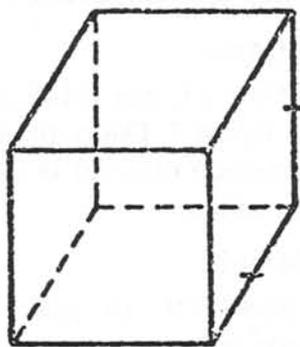


Fig. 11

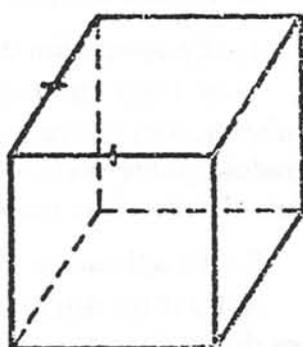


Fig. 12

Grupos finitos máximos.

A. Producidos por giros de todos los cubos vértices.

1.- La aplicación de la fórmula:

$FA/F^{-1} A/FA^{-1}/DA^{-1}/D^{-1} A/FA^{-1} /DA^{-1} /D^{-1}F^{-1} /DB/ FB^{-1} /IB^{-1} /I^{-1}B /F^{-1}B /FB^{-1} /IB^{-1} /I^{-1}B/F^{-1}D^{-1}/$ (5, pág. 109), origina los giros de todos los cubos vértices. Los cubos bordes no giran. En todas las caras aparecen cruces de brazos cortos del color de los cubos centrales.

Como cada cubo vértice gira $1/3$, hemos de aplicar la fórmula dos veces más, es decir, en total tres veces, para que todos los cubos vértices vuelvan a su sitio de partida.

B. Producidos por giros de todos los cubos bordes.

1.- La aplicación de la fórmula:

$(DIBAFT)^2B^2A^2IB^2FT^{-1}D^2AD^2I^2B^{-1}I^2TF^{-1}A^2D^{-1}$ (5, pág. 107), origina los giros de todos los cubos bordes del cubo. Los cubos vértices no giran. En todas las caras aparecen cruces de brazos largos del color de los cubos centrales.

Como los cubos bordes giran 180 grados, con repetir una vez más la fórmula conseguiremos que todos los cubos bordes vuelvan a su posición de origen.

Grupo finito super

A. Producido por los giros de todos los cubos bordes y de todos los cubos vértices.

Para obtener esta figura se desarrolla primero la fórmula que produce los giros de todos los cubos bordes. Después se desarrolla la fórmula que produce los giros de todos los cubos vértices.

Como los cubos bordes giran por la aplicación de la primera fórmula y los cubos vértices por la aplicación de la segunda fórmula, es indiferente el orden en que se desarrollan ambas fórmulas.

En ambos casos se obtiene la misma figura que yo denomino «grupo finito super».

Grupo finito infer

Producido por los movimientos de dos CV y de dos CB. De esta forma se pueden originar varios grupos finitos distintos.

Además de los grupos finitos extremos que acabamos de indicar, existen muchos más grupos finitos en el cubo, que son los *grupos finitos intermedios*. Son los producidos por movimientos de cubos bordes entre tres y once piezas, así los que originan los movimientos de cubos vértices entre tres y siete piezas. Estos grupos han sido tratados por nosotros en una publicación anterior (9).

El número de grupos finitos que se forman en el cubo de Rubik, por giros de sus caras, es extraordinario y sobre este asunto versará una próxima publicación mía.

BIBLIOGRAFIA

- GOMEZ SANCHEZ-MANZANO, E.: *El cubo de Rubik, al alcance de todos*. Madrid, Altalena, 1981.
- KOSNIOWSKI, C.: *Domine «fácilmente» el cubo mágico*, Barcelona, Fontalba, 1981.
- SINGMASTER, D.: *Nota sobre el cubo de Rubik, texto fundamental del gran maestro*. Madrid, Altalena, 1981.

- TRAJBER, J.: *El cubo de Rubik, para principiantes y conocedores*, Madrid, Altalena, 1981.
- WARUSFEL, A.: *Cómo jugar y divertirse con el cubo mágico de Rubik, soluciones para el juego del siglo con prólogo de E. Rubik*, Madrid, Altalena, 1981.
- WERNEEK, T.: *El cubo mágico*, Barcelona, Editors, 1981.
- PARDO FRAILE y DIAZ HERNANDEZ.: *Elementos de álgebra lineal y geometría*, Madrid, 1965.
- RUIZ SANTAELLA, J.: «Investigaciones en el cubo de Rubik». Entregado en el Rectorado de la Universidad de Córdoba, en mayo de 1984 (todavía no publicado).
- RUIZ SANTAELLA, J.: *Grupos finitos en el cubo de Rubik*, Córdoba, E.T.S.I.A., 1984.
- OLAZABAL, J. M. de: «El grupo del cubo de Rubik», conferencia en el I.C.E. de la Universidad de Málaga, junio, 1982.