Premiers outils : exercices

Application directe

Exercice 1

l'opposé de 3 est ,l'inverse de 3 est ,l'opposé de $\dfrac{-2}{3}$ est ,l'inverse de $\dfrac{-2}{3}$ est

$2+8\times 3 =$	$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3} =$	$\dfrac{2}{3}-\dfrac{3}{5} =$	$6\times\dfrac{2}{3} =$
$\dfrac{200+32}{400-8} =$	$\dfrac{3}{7}\times\dfrac{14}{18} =$	$\dfrac{14}{3}:4 =$	$\dfrac{2}{3}:\dfrac{3}{5} =$
$3+2\times\dfrac{2}{3} =$	$\dfrac{\frac{8}{4}}{2} =$	$\dfrac{8}{\frac{4}{2}} =$	$0{,}2\times 0{,}3 =$
$\sqrt{\dfrac{1}{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{8}} =$	$\dfrac{1}{5\times 10^{-2}} =$	$\dfrac{5}{\sqrt{5}} =$	$\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^3 =$
$7^5+6\times 7^5 =$	$\dfrac{1}{0{,}2} =$	$\dfrac{3^6\times 7^3}{21^4} =$	$\left(\sqrt{3}\right)^6 =$

Exercice 2

1. Développer $(3a+b)^2, (2a-3)^2, (a-\sqrt{5})(a+\sqrt{5}), (a+bc)d, (a+b+c)(d+e)$
2. Développer $(2+x)^4, (2x+3)^3, (x-y)^3, (2x+1)^4, (1-3x^2)^3$.
3. Factoriser $x^2-7, x^2+5x, x^2-6x+9,\ 1-x^2, 4x^2-9, x^3-4x$

Exercice 3

Soient x et y des réels, et l'assertion $(x\neq y)\wedge(xy\neq 1) \implies x(y^2+y+1)\neq y(x^2+x+1)$.

1. Écrire la contraposée de l'assertion.
2. Démontrer l'assertion.

Exercice 4

$\dbinom{6}{2} =$	$\dbinom{11}{3} =$	$\dbinom{17}{8}+\dbinom{17}{9} =$	$\dbinom{17}{8}-\dbinom{17}{7} =$
$\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}3^k2^{8-k} =$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}3^k =$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k} =$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{8}\binom{8}{k} =$

Entraînement

Exercice 5 (Extrait d'un devoir surveillé légèrement adapté)

1. Compléter ce tableau de vérité :

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$\neg A$	$A\Rightarrow B$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

2. Rappeler la définition de $A\Rightarrow B$? :
3. Écrire la contraposée de $A\Rightarrow B$:
4. Écrire la réciproque de $A\Rightarrow B$:
5. Compléter. $\neg(A\vee B)\equiv$ $\neg(A\Rightarrow B)\equiv$
6. Donner (sans justifier) la valeur de vérité des assertions suivantes.

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > -2$
(b) $\exists n \in \mathbb{N}, \pi < n < \pi^2$
(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x \leqslant n$
(d) $\exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant n$

7. Compléter : $A \subset E \equiv A \in$
8. Soient A et B des parties de Ω. Compléter $A \subset B \equiv \forall x \in \Omega,$
9. Sans utiliser le symbole $\neg$, écrire une assertion logiquement équivalente au contraire de

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, (n+2)p^5 \leqslant p - 7 + 3^p$$

10. Soit x un nombre réel.
    (a) Développer $(3x+2)^2$.
    (b) Factoriser $4 - x^2$.
    (c) Factoriser $7x - x^2$.
    (d) Justifier que $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x=3)$.
    (e) Montrer que si $x^2 - 2x - 15 + \mathrm{e}^{-x+1} < 0$, alors $x \in]-3;5[$.

Exercice 6

Soient A, B, C des assertions. Déterminer la valeur de vérité des assertions suivantes

1. $A \vee \neg A$
2. $A \wedge \neg A$
3. $(A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)$
4. $(A \implies B) \vee (B \implies C) \vee (C \implies A)$
5. $((A \implies B) \wedge (B \implies C)) \implies (A \implies C)$

Exercice 7

Soient A, B, C des assertions.Écrire une assertion logiquement équivalente simple.

1. $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$
2. $(A \wedge B) \wedge (A \wedge \neg B)$
3. $A \implies \neg A$
4. $(A \vee B) \implies A$

Exercice 8

Soit $1 \leqslant p \leqslant n$. Montrer que $\quad p \times \binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.

Exercice 9

Donner la valeur de vérité des assertions, et écrire leur contraire.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant x^2$.
2. $\forall x \in \mathbb{Z}, x \leqslant x^2$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leqslant y) \implies (x^2 \leqslant y^2)$.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, x - y < z^2$.

Exercice 10

Soient E et F des parties de l'ensemble Ω.

1. Justifier que $E \cap F$ et $E \backslash F$ sont disjoints.
2. Montrer que $E = (E \cap F) \cup (E \backslash F)$
3. Montrer que si $E \subset F$, alors $\overline{F} \subset \overline{E}$.
4. A-t-on $E \subset F$ si et seulement si $\overline{F} \subset \overline{E}$?

Exercice 11
Le monde et la langue française forment un cadre complexe. Formuler une assertion dans ce cadre est toujours délicat. Pour cet exercice, les seuls enfants d'Alain et Béatrice sont ceux qu'ils ont eu ensemble, dont une fille : Charlotte.

1. Formuler simplement le contraire des assertions suivantes.
   (a) Charlotte est fille unique.
   (b) Charlotte est l'aînée.
   (c) Charlotte est de très petite taille.
   (d) Charlotte a exactement trois cheveux.
   (e) Charlotte a au plus deux frères
   (f) Charlotte a un chien et un chat.
   (g) Si Charlotte est née en Juin, alors elle est blonde.
   (h) Si Charlotte aime les crêpes, elle les mange avec de la confiture de fraise ou de framboise.
   (i) Si Charlotte aime les crêpes ou le chocolat, alors elle est gourmande.
2. Lier les assertions par une implication vraie, pointer la condition suffisante, la condition nécessaire et énoncer la contraposée.
   (a) « Charlotte mesure plus d'un mètre », et « Charlotte mesure plus d'un mètre vingt »
   (b) « Charlotte a de quoi faire des crêpes », et « Charlotte a des œufs ».

Exercice 12
Pour chaque égalité, donner une écriture avec pointillés et dire si elle est toujours vraie, ou donner un contre-exemple.

1. $\sum_{i=0}^{n}(\lambda U_i) = \lambda \sum_{i=0}^{n}(U_i)$
2. $\sum_{i=0}^{n}(U_i + V_i) = \left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) + \left(\sum_{i=0}^{n} V_i\right)$
3. $\left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) \times \left(\sum_{i=0}^{n} V_i\right) = \sum_{i=0}^{n}(U_i \times V_i)$
4. $\sum_{i=0}^{n} k = (n+1)k$
5. $\sum_{i=0}^{n}(U_i + k) = \left(\sum_{i=0}^{n} U_i\right) + k$
6. $\sum_{j=3}^{12} U_{j+2} = \sum_{k=5}^{14} U_k$

Exercice 13
Les assertions suivantes définissent y en fonction de x. y peut ainsi être nommé et noté en fonction de x. Connaissez-vous les définitions suivantes ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}, x + y = 0.$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists ! y \in \mathbb{R}, xy = 1.$
3. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists ! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x.$
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{R}_+, y^2 = x^2.$
5. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! y \in \mathbb{Z}, y \leqslant x < y + 1.$

Recherche, prise d'initiative

Exercice 14
Les nombres pairs sont ceux de la forme $2k$ où k est entier. Les nombres impairs sont ceux de la forme $2k+1$ où k est entier.

1. Montrer que -5 est impair.
2. Soit n un entier. Écrire la contraposée de l'assertion « Si n^2 est pair, alors n est pair ».
3. Démontrer l'assertion ci-dessus.
4. On sait que $\sqrt{2}^2 = 2$ et on admet que tout rationnel admet une écrire sous forme d'une fraction irréductible, *ie* non simplifiable. Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Exercice 15
Soient A, B, C des assertions.

1. $\neg(A \vee B \vee C)$ et $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ sont-elles logiquement équivalentes ?
2. $(A \implies B) \implies C$ et $A \implies (B \implies C)$ sont-elles logiquement équivalentes ?

Exercice 16
Soient A et B des parties de Ω. On note $A * B$ l'ensemble $\overline{A} \cap \overline{B}$. Exprimer $\overline{A}, A \cap B$ et $A \cup B$ avec les seuls cinq caractères $AB()*$ utilisés autant de fois que nécessaire.

Exercice 17
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles. On définit les ensembles $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ et $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ en posant :
L'objet x est élément de $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ s'il existe un entier naturel n pour lequel $x \in E_n$.
L'objet x est élément de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ si pour tous les entiers naturels n, $x \in E_n$.
Simplifier les écritures suivantes :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-2; n] = \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-2; n] =$$

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-2; \frac{5}{n+1}\right] = \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-2; \frac{5}{n+1}\right] =$$

$$\bigcup_{n\in[\![0;6]\!]} \left[n; \frac{4n}{3}\right] = \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [n; +\infty[=$$

Exercice 18
En 1893, Frege propose de pouvoir définir un ensemble comme collection des objets mathématiques qui vérifient une relation. En 1902, Russell présente l'ensemble $E = \{x | x \notin x\}$.

1. Soit x un élément de E. Montrer que $x \notin E$.
2. Soit x qui n'est pas élément de E. Montrer que $x \in E$.
3. Conclure.

Note : Voici une version en français du même exercice : Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Qui rase le barbier ?

Devoir à la maison

Exercice 19
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$, et E un ensemble de cardinal n.

1. Développer $f(x)$.

2. En déduire une expression simple de $A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
3. A l'aide d'une interprétation de A en termes de dénombrement, déterminer card$(\mathcal{P}(E))$
4. Donner deux expressions de $f'(x)$. (On utilisera que $(u^n)' = nu'u^{n-1}$)
5. En déduire une expression simple de $B = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.
6. Calculer B en utilisant cette fois que pour $1 \leqslant p \leqslant n$. $p \times \binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
7. Retrouver la valeur de B en considérant le nombre d'éléments des parties de E.
8. Calculer $C = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

Exercice 20

Résoudre dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ les équations suivantes.

1. $\{1; 2\} \cup X = \{1; 2; 3\}$
2. $[1; 5] \cup X = [1; 8]$
3. $[1; 8] \cap X = [1; 5]$