Notación de Dirac. Vectores ket.

En este apartado vamos a introducir ya la notación de Dirac que es una nueva notación que permitirá trabajar con la teoría cuántica con mayor claridad y potencia. La notación de Dirac une dos aspectos. Por un lado, el hecho de que se pueda trabajar indistintamente con distintas representaciones y que todas sea equivalentes nos conduce a que, en realidad, no tenemos por qué escoger una representación concreta y podemos trabajar de forma abstracta sin escoger ninguna. Finalmente, para realizar un cálculo concreto se utilizará la más adecuada. Por otro lado, el hecho de que las dos funciones se traten de forma distinta en la definición de producto escalar (la primera lleva un complejo conjugado) nos conduce a que es más conveniente definir dos tipos distintos de elementos, al igual que ocurre con vectores covariantes y contravariantes en relatividad, o la red cristalina y la red recíproca en física del estado sólido.

Cuando en el espacio ordinario realizamos el siguiente paso:

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

¿en qué base se verifica esta igualdad? En todas. Se está trabajando de forma abstracta, sin utilizar las componentes de cada vector en una base concreta. Algo parecido ocurre al utilizar la notación de Dirac. Vamos allá!

Vamos a definir un espacio abstracto $\mathfrak{E}$ con estructura de espacio vectorial. Los elementos de este espacio los denominaremos vectores ket, o simplemente kets, y los notaremos por el símbolo $|\quad\rangle$, de modo que dentro colocaremos un distintivo (una letra, o un número, o cualquier otra cosa) que nos permita distinguir un ket de otro. El espacio $\mathfrak{E}$ lo denominaremos espacio de estados e incluirá todos los estados en los que puede estar nuestra partícula. Es importante darnos cuenta que el espacio de estados no es algo único ya que depende del problema físico que estemos tratando. No será el mismo para una partícula que se mueve en una sola dimensión que para una partícula que se mueve en el espacio de ordinario. No será el mismo para una partícula, que para un átomo, que para una molécula, etcétera. Por ahora, vamos a seguir con el problema sencillo de una partícula en una sola dimensión.

Sabemos que el estado de la partícula en un instante determinado viene descrito mediante una función de onda $\psi(x)$. Pues bien, lo que vamos a hacer es establecer una relación biunívoca entre las funciones de onda y los vectores del espacio de estados, de modo que a cada función de onda $\psi(x)$ le haremos corresponder de forma biunívoca un vector ket que notaremos de la forma $|\psi\rangle$:

$$\psi(x) \in \mathfrak{F} \Longleftrightarrow |\psi\rangle \in \mathfrak{E}$$

A partir de esta correspondencia podemos trabajar en el espacio $\mathfrak{E}$. La dependencia con la posición x no aparece en el ket $|\psi\rangle$, sólo la letra ψ nos recuerda que el estado está asociado a la función $\psi(x)$ que sí que depende de x. Es decir, no es apropiado escribir $|\psi(x)\rangle$ para referirnos al estado descrito mediante la función de onda $\psi(x)$.

Dentro del espacio de estados vamos a definir el mismo producto escalar que ya teníamos:

$$|\varphi\rangle \bullet |\psi\rangle = \varphi \bullet \psi = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(x)\ \ \psi(x)$$

Vamos a resolver ya el problema de que la primera función tenga un tratamiento distinto. Vamos a definir el espacio dual del espacio de estados que notaremos $\mathfrak{E}^*$. En el espacio dual se encuentran todas las funcionales lineales que a cada vector $|\psi\rangle \in \mathfrak{E}$ le asocian un número complejo. Para aclararnos, momentáneamente, vamos a notar un elemento concreto del espacio dual con la letra φ, de modo que este elemento del espacio dual al vector $|\psi\rangle$ le asocia un número complejo $\varphi\left(|\psi\rangle\right)$:

$$|\psi\rangle \in \mathfrak{E} \quad \overset{\varphi \in \mathfrak{E}^*}{\longrightarrow} \quad \varphi\left(|\psi\rangle\right) \in \mathbb{C}$$

Todo esto que parece tan complejo lo vamos simplificar utilizando una nueva notación y relacionándolo con el producto escalar que hemos definido. Los elementos del espacio dual $\mathfrak{E}^*$ los denominaremos vectores bra, o simplemente bras, y los notaremos por el símbolo $\langle \quad |$, de modo que dentro colocaremos un distintivo (una letra, o un número, o cualquier otra cosa) que nos permita distinguir un bra de otro. Pues bien, a cada vector ket del espacio de estados $|\varphi\rangle \in \mathfrak{E}$ le vamos a asociar un bra del espacio dual $\langle\varphi| \in \mathfrak{E}^*$, de modo que el número que asocia este bra al vector ket $|\psi\rangle$ sea el producto escalar $|\varphi\rangle \bullet |\psi\rangle = \varphi \bullet \psi$. Es decir, que la relación que hemos escrito anteriormente la escribiremos así:

$$|\psi\rangle \in \mathfrak{E} \quad \overset{\langle\varphi| \in \mathfrak{E}^*}{\longrightarrow} \quad \langle\varphi|\psi\rangle = \varphi \bullet \psi = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*\left(x\right)\ \psi\left(x\right) \in \mathbb{C}$$

Es decir, que el producto escalar de dos vectores $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ lo escribiremos así:

$$\langle\varphi|\psi\rangle$$

Ya nos podemos hacer una idea de dónde salen los nombres de los vectores bra y ket. La palabra "bracket" en inglés significa corchete $\langle\rangle$. Se ha dividido la palabra en dos, de modo que un bra incluye la primera parte $\langle$ y el ket la segunda $\rangle$. Cuando tenemos una expresión cerrada como $\langle\varphi|\psi\rangle$, que incluye las dos partes del corchete lo que tendremos es un número. Si falta alguna de las dos partes del corchete no será un número concreto.

Hay que tener cuidado con cómo se utiliza la notación de Dirac. Si tenemos un ket $|\varphi\rangle$ y lo multiplicamos por un número λ tenemos un nuevo vector $\lambda\,|\varphi\rangle$. En ocasiones podemos notar este nuevo vector como $|\lambda\varphi\rangle$, de modo que $|\lambda\varphi\rangle = \lambda\,|\varphi\rangle$. El problema está en asociar al nuevo ket el bra correspondiente ya que:

$$\langle\lambda\varphi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \lambda^*\varphi^*\left(x\right)\ \psi\left(x\right) = \lambda^* \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*\left(x\right)\ \psi\left(x\right) = \lambda^*\,\langle\varphi|\psi\rangle$$

Es decir, que debido al carácter antilineal del producto escalar con respecto a la primera función $\langle\lambda\varphi| = \lambda^*\,\langle\varphi|$, de modo que cuando sale el número complejo de un bra sale como complejo conjugado. Veremos que este es un caso particular de las reglas para asociar elementos del espacio dual $\mathfrak{E}^*$ a cada elemento del espacio de estados $\mathfrak{E}$.

Las mismas propiedades que vimos para el producto escalar se aplican en notación de Dirac:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\psi|\varphi\rangle^*$$
$$\langle\varphi|\lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2\rangle = \lambda_1\,\langle\varphi|\psi_1\rangle + \lambda_2\,\langle\varphi|\psi_2\rangle$$
$$\langle\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2|\psi\rangle = \lambda_1^*\,\langle\varphi_1|\psi\rangle + \lambda_2^*\,\langle\varphi_2|\psi\rangle$$

$\langle\psi|\psi\rangle$ es un número real positivo, igual a la norma al cuadrado de $|\psi\rangle$

Operadores lineales en notación de Dirac. Proyectores.

Los mismos operadores lineales que definimos para las funciones $\psi(x)$ los podemos definir para los vectores ket correspondientes:

$$\psi(x) \xrightarrow{\hat{A}} \psi'(x) = \hat{A}\psi(x) \qquad \text{de modo que} \qquad |\psi\rangle \xrightarrow{\hat{A}} |\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$$

Como el operador $\hat{A}$ era lineal actuando sobre las funciones, también será lineal al actuar sobre los ket. Del mismo modo podemos definir el producto de dos operadores $\hat{A}\hat{B}$:

$$\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle = \hat{A}\left(\hat{B}|\psi\rangle\right)$$

es decir, que primero actúa $\hat{B}$ sobre $|\psi\rangle$ dando lugar a un nuevo ket $|\psi'\rangle$ y posteriormente $\hat{A}$ actúa sobre el ket $|\psi'\rangle$ dando lugar a un nuevo ket que notaremos símplemente como $\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle$. Ya vimos que, en general, el producto de dos operadores no es conmutativo, de modo que definimos el conmutador de dos operadores $\left[\hat{A},\hat{B}\right]$,tal como ya hicimos, como como un nuevo operador de la forma:

$$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Por último, vamos a definir un nuevo concepto que será de gran utilidad y es el de elemento de matriz. Dados dos kets $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ definimos el elemento de matriz de un operador $\hat{A}$ entre los dos kets $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ como el producto escalar de $|\varphi\rangle$ y $\hat{A}|\psi\rangle$, es decir:

$$\langle\varphi|\left(\hat{A}|\psi\rangle\right) = \left\langle\varphi\left|\hat{A}\right|\psi\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \varphi^*(x)\,\hat{A}\psi(x)$$

Lógicamente, el elemento de matriz, al ser un producto escalar, es un número complejo.

La notación de Dirac, nos va a permitir realizar cálculos de forma más sencilla, pero como con toda notación sencilla hay que tener cuidado. Ya hemos visto un ejemplo en cómo sacar una constante λ de un bra $\langle\lambda\varphi|$. Por el hecho de ser más sencilla hay que tener más cuidado. Otro ejemplo lo constituye la siguiente expresión:

$$|\varphi\rangle\langle\psi|$$

Es decir, en lugar de multiplicar un bra por un ket lo hemos hecho al contrario. Esta expresión no es un número puesto que no ha quedado el corchete cerrado. Entonces, ¿qué es? Es un operador. Podemos ver que cuando actúa sobre un ket nos da un nuevo ket, tal como hace un operador:

$$(|\varphi\rangle\langle\psi|)|\chi\rangle = |\varphi\rangle\langle\psi|\chi\rangle$$

Como $\langle\psi|\chi\rangle$ es un número complejo, lo que tenemos es un número complejo por un vector $|\varphi\rangle$, que es un nuevo vector, de modo que $|\varphi\rangle\langle\psi|$ es un operador. Es importante ver que el número complejo $\langle\psi|\chi\rangle$ se puede mover en la expresión anterior sin ningún problema:

$$|\varphi\rangle\langle\psi|\chi\rangle = \langle\psi|\chi\rangle|\varphi\rangle$$

y sigue siendo el mismo número complejo $\langle\psi|\chi\rangle$ por el mismo vector $|\varphi\rangle$.

Vamos a considerar ahora un vector $|\varphi\rangle$ normalizado (de modo que $\langle\varphi|\varphi\rangle = 1$) y el siguiente operador:

$$\hat{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$$

Podemos ver cómo actúa este operador sobre un vector $|\psi\rangle$:

$$\hat{P}_\varphi|\psi\rangle = (|\varphi\rangle\langle\varphi|)|\psi\rangle = |\varphi\rangle\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle|\varphi\rangle$$

Es decir, al aplicarlo sobre el vector $|\psi\rangle$ nos queda un vector proporcional al vector $|\varphi\rangle$ y la constante de proporcionalidad es el producto escalar de los dos vectores. Lo que estamos haciendo es "proyectar" el vector $|\psi\rangle$ sobre el vector $|\varphi\rangle$. El operador $\hat{P}_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$ se denomina el proyector sobre el vector $|\varphi\rangle$. Podemos ver que $\hat{P}_\varphi^2 = \hat{P}_\varphi$, ya que es lo mismo proyectar dos veces que una:

$$\hat{P}_\varphi^2 = |\varphi\rangle\langle\varphi|\varphi\rangle\langle\varphi| = |\varphi\rangle\langle\varphi| = \hat{P}_\varphi$$

Adjunto de un operador.

Ya hemos definido el elemento de matriz de un operador lineal $\hat{A}$ entre dos vectores $|\varphi\rangle$ y $|\psi\rangle$ como el siguiente número:

$$\langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle$$

El significado es evidente $\hat{A}$ actuando sobre el vector $|\psi\rangle$ nos da un nuevo ket $\hat{A}|\psi\rangle$, de modo que tenemos un producto de un bra por un ket que es un número complejo. Pero lo podemos plantear de otra forma: el elemento $\langle\varphi|\hat{A}$ por el ket $|\psi\rangle$ nos da un número complejo, de modo que $\langle\varphi|\hat{A}$ es un nuevo bra! Es decir, que podemos entender que el operador $\hat{A}$ actúa sobre el bra $\langle\varphi|$ para dar un nuevo bra $\langle\varphi|\hat{A}$. Lo único es que cuando el operador $\hat{A}$ actúa sobre un bra hay que colocarlo a la derecha del bra. Podemos comprobar fácilmente que el operador $\hat{A}$ actuando de esta forma sobre los bras es también lineal.

Vamos a ver a continuación el concepto de adjunto de un operador. Supongamos un operador $\hat{A}$ que actúa sobre un ket $|\psi\rangle$ dando como resultado un nuevo ket $|\psi'\rangle$, que notamos como siempre de la forma $|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$. Al ket $|\psi\rangle$ del espacio $\mathfrak{E}$ le corresponde el bra $\langle\psi|$ del espacio dual $\mathfrak{E}^*$, mientras que al ket $|\psi'\rangle$ le corresponde el bra $\langle\psi'|$. Los kets $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ están relacionados mediante el operador $\hat{A}$. Podemos preguntarnos si existirá un operador que relacione también los bras $\langle\psi|$ y $\langle\psi'|$. Lógicamente este operador habrá que colocarlo, tal como hemos visto, a la derecha del bra. Pues la respuesta es que sí y este operador se denomina el adjunto de $\hat{A}$ y lo notaremos como $\hat{A}^\dagger$. Es decir:

$$\text{si } |\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle \Longrightarrow \langle\psi'| = \langle\psi|\hat{A}^\dagger$$

(el símbolo † se denomina daga, o "dagger" en inglés).

Es decir, si un operador $\hat{A}$ establece una relación entre dos kets del espacio de estados $\mathfrak{E}$, el operador adjunto $\hat{A}^\dagger$ es el que establece la misma relación entre los bra correspondientes del espacio dual $\mathfrak{E}^*$.

Una relación que utilizaremos en muchas ocasiones es la que existe entre los elementos de matriz de un operador y de su adjunto. Supongamos un operador $\hat{A}$ y un ket $|\psi\rangle$, de

modo que $\hat{A}\,|\psi\rangle = |\psi'\rangle$. Dado un bra $\langle\varphi|$ el producto de $\langle\varphi|$ por $|\psi'\rangle$ nos da el elemento de matriz que ya vimos:

$$\langle\varphi|\psi'\rangle = \langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle$$

Si ahora tomamos el complejo conjugado:

$$\langle\varphi|\psi'\rangle^* = \langle\psi'|\varphi\rangle = \langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle^*$$

Pero hemos visto que $\langle\psi'|$ es el bra que corresponde al $|\psi'\rangle$ y que vale $\langle\psi'| = \langle\psi|\,\hat{A}^\dagger$, por tanto:

$$\langle\psi'|\varphi\rangle = \langle\psi|\,\hat{A}^\dagger\,|\varphi\rangle = \langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle^*$$

Hemos llegado a la siguiente relación:

$$\langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle^* = \langle\psi|\,\hat{A}^\dagger\,|\varphi\rangle$$

Esta relación nos permite ver algunas propiedades generales de cómo se obtiene el adjunto de un operador.

Si λ es un número complejo y $\hat{A}$ un operador, entonce $\lambda\hat{A}$ es otro operador. Veamos cual es su adjunto:

$$\langle\varphi|\,\lambda\hat{A}\,|\psi\rangle^* = \left\langle\psi\left|\left(\lambda\hat{A}\right)^\dagger\right|\varphi\right\rangle = \lambda^*\,\langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle^* = \lambda^*\,\langle\psi|\,\hat{A}^\dagger\,|\varphi\rangle = \langle\psi|\,\lambda^*\hat{A}^\dagger\,|\varphi\rangle$$

Por tanto, como cabía esperar $\left(\lambda\hat{A}\right)^\dagger = \lambda^*\hat{A}^\dagger$.

Otra propiedad fácil de ver es que el adjunto del adjunto es el operador original.

$$\langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle = \left(\langle\varphi|\,\hat{A}\,|\psi\rangle^*\right)^* = \langle\psi|\,\hat{A}^\dagger\,|\varphi\rangle^* = \left\langle\varphi\left|\left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger\right|\psi\right\rangle$$

de modo que $\left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger = \hat{A}$. Es algo parecido a lo que ocurre con el complejo conjugado, de modo que si aplicamos dos veces el complejo conjugado de un número nos queda el original.

Si $\hat{B}$ es otro operador entonces es fácil mostrar que $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$.

El producto $\hat{A}\hat{B}$ es otro operador. Vamos a calcular su adjunto. Utilizaremos la siguiente notación:

$$\text{si}\ \begin{cases}\langle\varphi'| = \langle\varphi|\,\hat{A}\\ |\psi'\rangle = \hat{B}\,|\psi\rangle\end{cases}\quad \text{los bras y kets correspondientes serán:}\ \begin{cases}|\varphi'\rangle = \hat{A}^\dagger\,|\varphi\rangle\\ \langle\psi'| = \langle\psi|\,\hat{B}^\dagger\end{cases}$$

Con esta notación podemos obtener el adjunto de $\hat{A}\hat{B}$ como sigue:

$$\langle\varphi'|\psi'\rangle^* = \left\langle\varphi\left|\hat{A}\hat{B}\right|\psi\right\rangle^* = \left\langle\psi\left|\left(\hat{A}\hat{B}\right)^\dagger\right|\varphi\right\rangle = \langle\psi'|\varphi'\rangle = \left\langle\psi\left|\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger\right|\varphi\right\rangle$$

Por tanto, $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger$.

Mediante esta regla podemos obtener el adjunto de cualquier suma y producto de operadores. Como ejemplo, si $\hat{C}$ es un tercer operador, veamos cuál es el adjunto del operador $\hat{A}\hat{B}\hat{C}$:

$$\left(\hat{A}\hat{B}\hat{C}\right)^{\dagger} = \left(\underbrace{\hat{A}\hat{B}}\hat{C}\right)^{\dagger} = \hat{C}^{\dagger}\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{\dagger} = \hat{C}^{\dagger}\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}$$

Es decir, que el adjunto de un producto de operadores se obtiene invirtiendo el orden del producto y sustituyendo los operadores por sus adjuntos.

También en este caso hay que llevar cuidado con la notación. Si tenemos un operador $\hat{A}$ y lo aplicamos sobre un ket $|\psi\rangle$ obtenemos un nuevo ket, $\hat{A}|\psi\rangle$. En ocasiones este ket se nota como $\left|\hat{A}\psi\right\rangle$. El bra correspondiente a este ket será $\left\langle\hat{A}\psi\right| = \langle\psi|\hat{A}^{\dagger}$. Por tanto, cuando dentro del ket tenemos un operador, para extraerlo hay que sustituirlo por su adjunto y colocarlo a la derecha.

Por último, dado un ket $|\varphi\rangle$ y un bra $\langle\psi|$, vimos que $|\varphi\rangle\langle\psi|$ es un operador. ¿Cuál será su adjunto? Hacemos lo mismo que en los casos anteriores. Vamos a considerar un elemento de matriz y tomamos su complejo conjugado:

$$\begin{aligned}\langle\alpha|(|\varphi\rangle\langle\psi|)|\beta\rangle^{*} &= \underbrace{\left\langle\beta\left|(|\varphi\rangle\langle\psi|)^{\dagger}\right|\alpha\right\rangle} = (\langle\alpha|\varphi\rangle\langle\psi|\beta\rangle)^{*} = \langle\alpha|\varphi\rangle^{*}\langle\psi|\beta\rangle^{*} = \\ &= \langle\varphi|\alpha\rangle\langle\beta|\psi\rangle = \langle\beta|\psi\rangle\langle\varphi|\alpha\rangle = \underbrace{\langle\beta|(|\psi\rangle\langle\varphi|)|\alpha\rangle}\end{aligned}$$

De la igualdad de los términos que hemos señalado con una llave se deduce que $(|\varphi\rangle\langle\psi|)^{\dagger} = |\psi\rangle\langle\varphi|$.

Estamos viendo que siempre existe una correspondencia entre los elementos que pertenecen o actúan en el espacio de estados $\mathfrak{E}$ y los del espacio dual $\mathfrak{E}^{*}$. A un ket le corresponde su bra correspondiente y a operador le corresponde su adjunto, pero de la misma forma a un número le corresponde su complejo conjugado. La operación de hacer corresponder a un elemento del espacio $\mathfrak{E}$ su correspodiente elemento del espacio $\mathfrak{E}^{*}$ se denomina conjugación hermítica y tiene unas reglas muy sencillas: se sustituyen las constantes por sus complejos conjugados, los kets por sus bras correspondientes, los bras por sus kets correspondientes, los operadores por sus adjuntos y, por último, se escribe la expresión en orden inverso.

Ejemplo, si analizamos la siguiente expresión:

$$\lambda\langle\varphi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle\hat{C}^{\dagger}\hat{D}\hat{F}|\chi\rangle$$

aunque parezca muy compleja se trata de un ket, ya que $\langle\varphi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle$ es un número complejo, de modo que $\lambda\langle\varphi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle$ es un número complejo. Por otro lado, $\hat{C}^{\dagger}\hat{D}\hat{F}$ es un operador, que actuando sobre el ket $|\chi\rangle$ nos da un nuevo ket $\hat{C}^{\dagger}\hat{D}\hat{F}|\chi\rangle$. Por tanto, $\lambda\langle\varphi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle\hat{C}^{\dagger}\hat{D}\hat{F}|\chi\rangle$ es el número complejo $\lambda\langle\varphi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle$ que multiplica al ket $\hat{C}^{\dagger}\hat{D}\hat{F}|\chi\rangle$, y un número por un ket es un nuevo ket. Pues bien, nos preguntamos ¿cuál será su bra correspondiente? Aplicamos las reglas que acabamos de ver:

$$\lambda\langle\varphi|\hat{A}\hat{B}|\psi\rangle\hat{C}^{\dagger}\hat{D}\hat{F}|\chi\rangle \in \mathfrak{E} \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\chi|\hat{F}^{\dagger}\hat{D}^{\dagger}\hat{C}\langle\psi|\hat{B}^{\dagger}\hat{A}^{\dagger}|\varphi\rangle\lambda^{*} \in \mathfrak{E}^{*}$$

Este último es el bra que le correponde en el espacio dual $\mathfrak{E}^{*}$.