Teoría no relativista del espín. Espinores.

Una vez que hemos analizado las propiedades de un momento angular $\frac{1}{2}$ vamos a ver cómo podemos introducir el espín en nuestra teoría. Como vimos anteriormente el espín es un grado de libertad distinto de los grados de libertad espaciales, de modo que los operadores de espín actúan sobre un espacio que notaremos por $\mathfrak{E}_s$ de dimensión 2. Por otro lado las funciones de onda que hemos utilizado hasta el momento pertenece al espacio de estados $\mathfrak{E}_{\mathbf{r}}$. Para introducir el espín tenemos que definir un nuevo espacio de estados que será el producto tensorial de los dos espacios anteriores $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_r \otimes \mathfrak{E}_s$. Una base de este nuevo espacio de estados la constituyen los vectores $\{|\mathbf{r},+\rangle, |\mathbf{r},-\rangle\}$. En esta base los operadores $\hat{\mathbf{r}}$ y $\hat{S}_z$ son diagonales, de modo que:

$$\hat{r}\,|\mathbf{r},\pm\rangle = \mathbf{r}\,|\mathbf{r},\pm\rangle \qquad \text{y} \qquad \hat{S}_z\,|\mathbf{r},\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}\,|\mathbf{r},\pm\rangle$$

Esta base satisface las relaciones de ortogonalidad y cierre:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r},+|\mathbf{r}',+\rangle &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
\langle \mathbf{r},-|\mathbf{r}',-\rangle &= \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \\
\langle \mathbf{r},+|\mathbf{r}',-\rangle &= \langle \mathbf{r},-|\mathbf{r}',+\rangle = 0
\end{aligned}$$

$$\int d^3\mathbf{r}\ \left(|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+| + |\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\right) = 1$$

Por tanto cualquier estado se puede escribir como una combinación lineal de los vectores de esta base. Vamos a suponer que una partícula se encuentra en el estado $|\psi\rangle$. Si introducimos la relación de cierre a la izquierda queda:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \int d^3\mathbf{r}\ \left(|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle + |\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle\right) = \\
&= \int d^3\mathbf{r}\ \left(\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle\,|\mathbf{r},+\rangle + \langle\mathbf{r},-|\psi\rangle\,|\mathbf{r},-\rangle\right)
\end{aligned}$$

El producto escalar $\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle$ es una función de las coordenadas que la notaremos por $\psi_+(\mathbf{r})$ y del mismo modo $\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle = \psi_-(\mathbf{r})$. Por tanto la ecuación anterior se puede escribir como:

$$|\psi\rangle = \int d^3\mathbf{r}\ \big(\psi_+(\mathbf{r})\,|\mathbf{r},+\rangle + \psi_-(\mathbf{r})\,|\mathbf{r},-\rangle\big)$$

Es decir, que en la representación dada por la base $\{|\mathbf{r},+\rangle, |\mathbf{r},-\rangle\}$ el estado de una partícula está representado por dos funciones que son $\psi_\pm(\mathbf{r})$. Vamos a ver cuál es la condición de normalización del estado $|\psi\rangle$ utilizando esta representación:

$$\begin{aligned}
\langle\psi|\psi\rangle &= \int d^3r\ \left(\langle\psi|\mathbf{r},+\rangle\langle\mathbf{r},+|\psi\rangle + \langle\psi|\mathbf{r},-\rangle\langle\mathbf{r},-|\psi\rangle\right) = \\
&= \int d^3r\ \left(\left|\psi_+(\mathbf{r})\right|^2 + \left|\psi_-(\mathbf{r})\right|^2\right) = 1
\end{aligned}$$

En lugar de trabajar con las funciones $\psi_{\pm}(\mathbf{r})$ es más conveniente escribir estas funciones en forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Esta representación del estado de una partícula se denomina espinor. La condición de normalización utilizando el espinor será:

$$\int d^3\mathbf{r} \begin{pmatrix} \psi_+^*(\mathbf{r}) & \psi_-^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 1$$

Vamos a ver a continuación cómo actúan los operadores que conocemos utilizando la representación de espinores. Hay operadores que actúan sobre el espacio $\mathfrak{E}_r$ como son la posición, el momento y el momento angular, mientras que otros operadores actúan sobre el espacio $\mathfrak{E}_s$ como son los operadores de spín. El operador de posición es diagonal en esta representación de modo que actúa como sigue:

$$\hat{\mathbf{r}} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \mathbf{r} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Por otro lado, el operador momento actúa sobre cada componente del espinor exactamente igual que en le representación coordenadas, es decir:

$$\hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -i\hbar\vec{\nabla} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\hbar\vec{\nabla}\left(\psi_+(\mathbf{r})\right) \\ -i\hbar\vec{\nabla}\left(\psi_-(\mathbf{r})\right) \end{pmatrix}$$

Vamos a ver cómo actúan los operadores de spín. El operador $\hat{S}_z$ también es diagonal en esta representación y se puede ver que actúa del siguiente modo:

$$\hat{S}_z \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ -\psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_z \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Los operadores $\hat{S}_x$ y $\hat{S}_y$ actúan de forma similar:

$$\hat{S}_x \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_x \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \psi_-(\mathbf{r}) \\ \psi_+(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_y \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\sigma_y \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+(\mathbf{r}) \\ \psi_-(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -i\psi_-(\mathbf{r}) \\ i\psi_+(\mathbf{r}) \end{pmatrix}$$

Finalmente podemos tener operadores combinados que mezclen operadores que actúan sobre el espacio $\mathfrak{E}_r$ con operadores que actúan sobre el espacio $\mathfrak{E}_s$ como por ejemplo el operador $\hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$. Este operador actúa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{p}} &= \frac{\hbar}{2}\left(\sigma_x\hat{p}_x + \sigma_y\hat{p}_y + \sigma_z\hat{p}_z\right) = \\ &= \frac{\hbar}{2}\left[\begin{pmatrix} 0 & -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\hbar\frac{\partial}{\partial y} \\ \hbar\frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}\right] = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \\ -i\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{p}}\begin{pmatrix}\psi_+(\mathbf{r})\\ \psi_-(\mathbf{r})\end{pmatrix} &= \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{\partial}{\partial z} & -i\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\\ -i\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y} & i\frac{\partial}{\partial z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_+(\mathbf{r})\\ \psi_-(\mathbf{r})\end{pmatrix} = \\
&= \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix} -i\frac{\partial\psi_+}{\partial z} - i\frac{\partial\psi_-}{\partial x} - \frac{\partial\psi_-}{\partial y}\\ -i\frac{\partial\psi_+}{\partial x} + \frac{\partial\psi_+}{\partial y} + i\frac{\partial\psi_-}{\partial z}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En el siguiente apartado vamos a ver cómo podemos calcular probabilidad y densidades de probabilidad utilizando los espinores.